

SUR CERTAINES CONSTRUCTIONS DES COURBES PLANES ET RATIONELLES DU 3^{me} et 4^{me} ORDRE

Autor(en): **Vyichlo, F.**

Objektyp: **Article**

Zeitschrift: **L'Enseignement Mathématique**

Band (Jahr): **34 (1935)**

Heft 1: **L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE**

PDF erstellt am: **16.07.2024**

Persistenter Link: <https://doi.org/10.5169/seals-26613>

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern.

Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden.

Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

Haftungsausschluss

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

SUR
CERTAINES CONSTRUCTIONS DES COURBES PLANES
ET RATIONNELLES DU 3^{me} et 4^{me} ORDRE

PAR

F. VYČICHLO (Praha).

I. — Dans ce bref article nous montrerons les constructions simples des courbes planes et rationnelles du 3^{me} et 4^{me} ordre en supposant qu'elles sont données par les points doubles et par le nombre convenable des points ordinaires.

Nous déduirons nos constructions à l'aide de la symbolique vectorielle bien connue.

Posons l'origine o dans un point arbitraire en dehors des points sur le plan π des courbes prises en considération.

Dans notre symbolique soit :

- a) x le rayon vecteur ox du point x du plan π ;
- b) A le vecteur différent de zéro et normal au plan (oA) par le point o , c'est-à-dire le vecteur normal au plan, qui projette la droite A du point o dans le plan π ;
- c) $a \times b$ le produit vectoriel;
- d) $a \cdot b$ le produit scalaire;
- e) $a \times b \times M \times c \times N$ le symbole¹ pour
$$\{ [(a \times b) \times M] \times c \} \times N ;$$
- f) (a, b, c, d) le symbole pour $(a \times b) \times (c \times d)$.

¹ Si les parenthèses ne sont pas écrites, nous devons faire les constructions progressivement de gauche à droite comme elles sont données par les symboles rangés en ligne.

II. THÉORÈME 1. — Deux points a, b ne sont situés sur la droite A du plan π que quand et uniquement quand :

$$a \times b = \alpha A ,$$

où α est le facteur $\neq 0$.

La démonstration est évidente, si nous prenons en considération la définition triviale du produit vectoriel.

THÉORÈME 2. — Le point x est situé sur la droite A (du plan π) quand et uniquement quand :

$$x \cdot A = 0 .$$

La démonstration triviale découle de la définition bien connue du produit scalaire.

THÉORÈME 3. — Le point p est l'intersection des droites A, B quand et uniquement quand :

$$p = \lambda A \times B ,$$

où λ est le facteur $\neq 0$.

Démonstration: Le vecteur p est dans le plan (oA) et aussi dans le plan (oB) ; il est donc normal aux vecteurs A, B .

THÉORÈME 4. — L'expression $a \times b \times M \times c \times N$ représente le point construit de la manière suivante :

Nous joignons les points a, b et déterminons l'intersection de cette droite avec la droite M .

Nous joignons ce point au point c et nous coupons cette droite par la droite N . Cette intersection est le point cherché.

La démonstration découle de la supposition e) et des théorèmes 1 et 3.

THÉORÈME 5. — a) L'expression (a, b, c, d) représente le point qui est construit de la manière suivante: Nous joignons ab et cd et déterminons l'intersection de ces droites.

b) On a :

$$(a, b, c, d) \times a = \lambda a \times b , \quad (a, b, a, c) = \mu a ,$$

où λ, μ sont les facteurs $\neq 0$.

La démonstration du théorème *a*) résulte évidemment de la supposition *f*) et des théorèmes 1 et 3.

Le théorème *b*) est la conséquence du théorème *a*).

THÉORÈME 6. — L'équation de la conique qui passe par les points *a, b, c, d, e* est

$$[(a, b, d, e) \times (b, c, e, x)] \cdot (c, d, x, a) = 0 .$$

La démonstration: Si nous indiquons par *x* le point de la conique déterminée par les points *a, b, c, d, e* il y a le théorème de Pascal dans l'hexagone *a, b, c, d, e, x*. Le point *(a, b, d, e)* détermine avec le point *(b, c, e, x)* la droite de Pascal de l'hexagone mentionné et sur cette droite se trouve aussi le point *(c, d, x, a)*. Cette condition, nécessaire et suffisante pour que le point soit situé sur la conique, est justement écrite par notre équation.

THÉORÈME 7. — La transformation quadratique

$$y \equiv f_1(x) = (x, b, c, d) \times (a, c, b, e) \times (x \times a) \quad (1)$$

adjoit le point *y* au point *x*, et ce point *y* peut être déterminé par construction linéaire.

Inversement: Le point *x* appartient au point *y* par la transformation quadratique

$$x \equiv f_2(y) = y \times (a, c, b, e) \times (c \times d) \times b \times (y \times a) \quad (2)$$

et ce point peut aussi être construit linéairement. Les points *a, b, c* sont les points principaux de cette transformation de Cremona et les points *d, e* appartiennent aux mêmes points *d, e* par (1) ou (2).

Démonstration: Le deuxième membre de l'équation (1) montre que nous construisons le point *y* en partant de *x*, par projection linéaire des points et par intersection de droites. (Voir fig. 1.)

Nous obtiendrons l'équation (2) si nous inversons la construction et si nous écrivons cette construction dans notre symbolique. Il est évident que cette construction réciproque est aussi linéaire.

Si nous posons les valeurs a, b, c dans (1) au lieu de x , nous aurons

$$f_1(a) = 0, \quad f_1(b) = 0, \quad f_1(c) = 0.$$

L'équation (2) donne aussi

$$f_2(a) = 0, \quad f_2(b) = 0, \quad f_2(c) = 0.$$

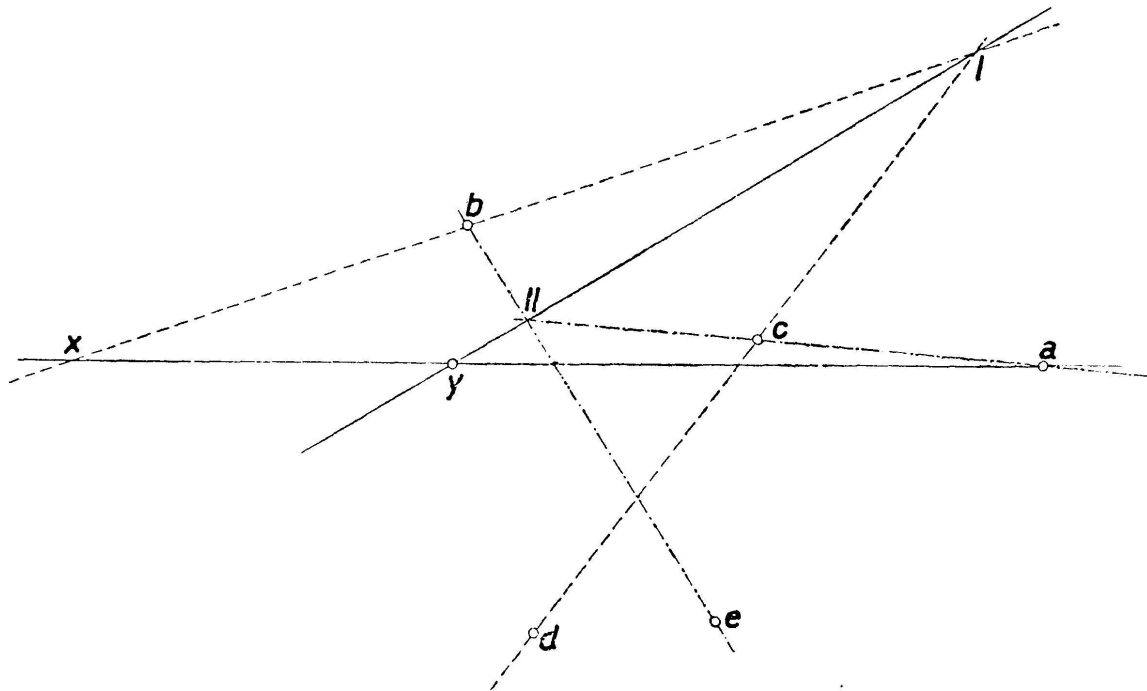


Fig. 1.

Alors: Les points a, b, c sont les points principaux de la transformation. Pour $x = d, x = e$ l'équation (1) donne

$$f_1(d) = d,$$

$$f_1(e) = e.$$

La théorie des transformations de Cremona donne les théorèmes bien connus.

α) La transformation quadratique de Cremona transforme toute conique qui ne passe par aucun point principal dans la quartique rationnelle, qui a les points doubles dans les points principaux et inversement.

β) La transformation quadratique de Cremona transforme toute conique qui passe par le point principal dans la cubique ¹

¹ Ici nous ne considérons pas la droite qui passe par les deux autres points principaux.

rationnelle avec point double en ce point principal de la transformation (et inversement).

THÉORÈME 8. — La construction de la quartique qui est déterminée par les points doubles a, b, c et par les autres points (dans la position générale) d, e, f, g, h est la suivante :

Nous construirons les points

$$f_1(f) = l, \quad f_1(g) = m, \quad f_1(h) = n,$$

par la construction linéaire (1) du théorème 7 et la conique K qui passe par les points: d, e, l, m, n . Si y est le point de cette conique, le point x , construit de point y par (2) du théorème 7 est le point de la quartique.

Démonstration: La transformation quadratique (1) du théorème 7 transforme la quartique dans la conique K (après le théorème α), qui passe par les points adjoints aux points d, e, f, g, h . Ce sont les points d, e (voir le théorème 7) et les points $f_1(f) = l, f_1(g) = m, f_1(h) = n$, que nous construirons par la construction linéaire (1). C'est par ces points que la conique K est déterminée.

La transformation quadratique (2) du théorème 7 transforme cette conique K dans la quartique avec les points doubles a, b, c et qui passe par les points d, e, f, g, h (d'après le théorème α).

En conséquence le point x de la quartique adjoint au point arbitraire y de la conique K est construit linéairement par (2) du théorème 7.

L'équation de la quartique peut aussi fournir la preuve du théorème mentionné. L'équation de la conique K est

$$[(d, e, m, n) \times (e, l, n, y)] \cdot (l, m, d, y) = 0 \quad (3)$$

d'après le théorème 6.

Si nous écrivons ici $f_1(x)$ au lieu y , nous aurons l'équation de la quartique cherchée, qui a les points doubles a, b, c , et qui passe par les points d, e, f, g, h .

THÉORÈME 9. — La construction de la cubique, qui est déterminée par le point double a et par les six autres points ordinaires (en position générale) b, c, d, e, f, g est la suivante (fig. 2):

Nous construirons les points $f_1(f) = l$, $f_1(g) = m$ à l'aide de la construction (1) du théorème 7 et la conique K donnée par les points a, d, e, l, m .

Le point x , construit à l'aide de l'équation (2) du théorème 7 en partant du point y de la conique K est le point de la cubique cherchée.

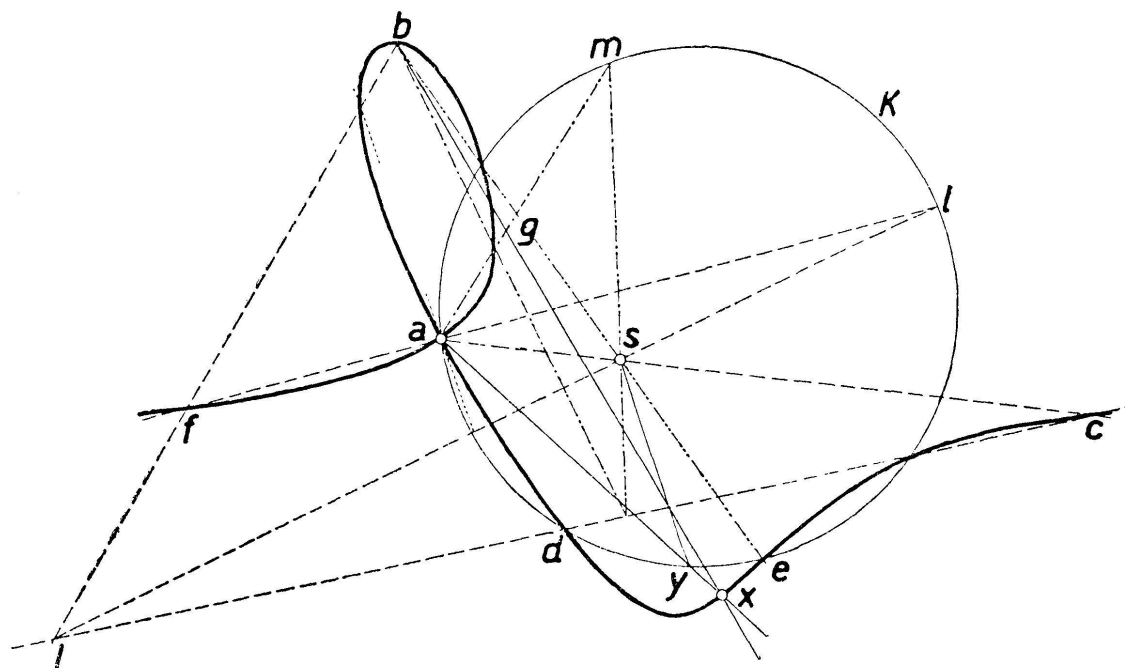


Fig. 2.

La démonstration résulte directement du théorème 7 et de β); elle est analogue à la preuve du théorème 8.

Nous obtiendrons l'équation de la cubique à l'aide de l'équation de la conique K, donnée par les points a, d, e, l, m .

Il y aura

$$[(a, d, l, m) \times (d, e, m, y)] \cdot (e, l, y, a) = 0 \quad (3a)$$

d'après le théorème 6.

Si nous posons dans (3a):

$$y = f_1(x), \quad [(1) \text{ du théorème 7}]$$

et

$$y \times a = \alpha x \times a$$

nous aurons l'équation cherchée

$$[(a, d, l, m) \times (d, e, m, f_1(x))] \cdot (e, l, x, a) = 0 \quad (4)$$

THÉORÈME 10. — Les droites tangentes de la cubique (4) au point double sont les tangentes de la conique, qui est déterminée par les droites tangentes: $A \equiv (e \times l)$, $B \equiv (e \times m)$, $C \equiv (l \times n)$, $D \equiv (a, b, c, d) \times (a, c, b, e)$, $E \equiv [D \times (d \times e)] \times (a, d, l, m)$.

Démonstration: Si nous écrivons, dans l'équation (4), a au lieu de x et T au lieu de $(a \times x)$ et enfin

$$f_1(x) = (x, b, c, d) \times (a, c, b, e) \times T$$

nous aurons, après un calcul très facile,

$$T \times (e \times l) \times (a, d, l, m) \times (d \times e) \times m \times (a, b, c, d) \times (a, c, b, e) \cdot T = 0, \quad (5)$$

Les droites T qui satisfont l'équation quadratique (5) enveloppent une conique.

Si nous posons les droites A, B, C, D, E , mentionnées plus haut, successivement, au lieu T , dans (5), nous verrons que ces droites sont tangentes de la conique (5). En conséquence nous obtiendrons les tangentes de la cubique (4) au point a , si nous construisons les deux tangentes possibles de la conique (5) par le point a .

THÉORÈME 11. — La construction linéaire

$$T_x = (a, d, l', m') \times (e, l', a, x) \times (d \times e) \times m' \times (a \times x) \times \\ \times (a, c, x, e) \times (c \times d) \times x,$$

où

$$l' = (f, x, c, d) \times (a, c, x, e) \times (f \times a) \\ m' = (g, x, c, d) \times (a, c, x, e) \times (g \times a)$$

donne la droite tangente en x à la cubique (4).

La démonstration de cette construction résulte de l'équation (3a) de la conique K du théorème 9. Nous construisons sa droite tangente en y et nous transformons cette droite par (2) dans une autre conique.

La tangente en x est T_x .

Une autre démonstration résulte de la construction de la droite tangente en b à la cubique (4).

La construction de la droite T_b résulte de l'équation (4) analogiquement à la construction T_a (voir le théorème 10). Nous aurons :

$$T_b = (a, d, l, m) \times (e, l, a, b) \times (d \times e) \times m \times (a \times b) \times \\ \times (a, c, b, e) \times (c \times d) \times b,$$

où

$$l = (f, b, c, d) \times (a, c, b, e) \times (f \times a) \\ m = (g, b, c, d) \times (a, c, b, e) \times (g \times a)$$

après (1) du théorème 7.

Si nous posons partout x au lieu b , nous aurons la construction que nous avons à démontrer.

Prague, janvier 1935.

REMARQUES SUR UN THÉORÈME DE SYLVESTER

PAR

Aloys HERRMANN (Köthen in Anhalt).

Cette Note a pour but d'exposer une méthode qui fait voir qu'on peut étendre les recherches de SYLVESTER¹, *Sur la solution explicite de l'équation quadratique de Hamilton en quaternions ou en matrices du second ordre*.

Soient A, B, C et X des matrices carrées d'ordre $n = 2$; il est démontré que chaque racine caractéristique d'une solution X de l'équation en matrices $AX^2 + BX + C = 0$ est une solution de l'équation algébrique de l'ordre 4 en λ , obtenue en annulant le déterminant $|A\lambda^2 + B\lambda + C|$. En outre, on a fait² plusieurs tentatives pour déterminer le nombre des solutions d'une équation en matrices d'ordre $n > 2$.

¹ SYLVESTER, *C. R. Acad. Sci.*, Paris, vol. 99 (1884), p. 555-558 et 621-631.

² *Ibidem*, p. 13-15; *Phil. Mag.*, vol. 18 (1884), p. 454-458; *Quat. J. math.*, vol. 20 (1885), p. 305-312.