Zeitschrift: L'Enseignement Mathématique

Herausgeber: Commission Internationale de l'Enseignement Mathématique

Band: 34 (1935)

Heft: 1: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE

Artikel: SUR CERTAINES CONSTRUCTIONS DES COURBES PLANES ET RATIONELLES DU 3me et 4me ORDRE

Autor: Vyichlo, F.

DOI: https://doi.org/10.5169/seals-26613

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Mehr erfahren

Conditions d'utilisation

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. En savoir plus

Terms of use

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. Find out more

Download PDF: 05.07.2025

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, https://www.e-periodica.ch

SUR
CERTAINES CONSTRUCTIONS DES COURBES PLANES ET RATIONELLES DU 3me et 4me ORDRE

PAR

F. VYČICHLO (Praha).

I. — Dans ce bref article nous montrerons les constructions simples des courbes planes et rationnelles du 3me et 4me ordre en supposant qu'elles sont données par les points doubles et par le nombre convenable des points ordinaires.

Nous déduirons nos constructions à l'aide de la symbolique vectorielle bien connue.

Posons l'origine o dans un point arbitraire en dehors des points sur le plan π des courbes prises en considération.

Dans notre symbolique soit:

a) x le rayon vecteur ox du point x du plan π;

b) A le vecteur différent de zéro et normal au plan (oA) par le point o, c'est-à-dire le vecteur normal au plan, qui projette la droite A du point o dans le plan π;

c) $a \times b$ le produit vectoriel;

d) $a \cdot b$ le produit scalaire;

e) $a \times b \times \mathrm{M} \times c \times \mathrm{N}$ le symbole[1] pour

$$\left\{ \left[(a \times b) \times \mathrm{M} \right] \times c \right\} \times \mathrm{N} \; ;$$

f) (a, b, c, d) le symbole pour $(a \times b) \times (c \times d)$.

---

[1] Si les parenthèses ne sont pas écrites, nous devons faire les constructions progressivement de gauche à droite comme elles sont données par les symboles rangés en ligne.

II. Théorème 1. — Deux points a, b ne sont situés sur la droite A du plan π que quand et uniquement quand:

$$a \times b = \alpha \mathrm{A} ,$$

où α est le facteur $\neq 0$.

La démonstration est évidente, si nous prenons en considération la définition triviale du produit vectoriel.

Théorème 2. — Le point x est situé sur la droite A (du plan π) quand et uniquement quand:

$$x \cdot \mathrm{A} = 0 .$$

La démonstration triviale découle de la définition bien connue du produit scalaire.

Théorème 3. — Le point p est l'intersection des droites A, B quand et uniquement quand:

$$p = \lambda \mathrm{A} \times \mathrm{B} ,$$

où λ est le facteur $\neq 0$.

Démonstration: Le vecteur p est dans le plan (oA) et aussi dans le plan (oB); il est donc normal aux vecteurs A, B.

Théorème 4. — L'expression $a \times b \times \mathrm{M} \times c \times \mathrm{N}$ représente le point construit de la manière suivante:

Nous joignons les points a, b et déterminons l'intersection de cette droite avec la droite M.

Nous joignons ce point au point c et nous coupons cette droite par la droite N. Cette intersection est le point cherché.

La démonstration découle de la supposition e) et des théorèmes 1 et 3.

Théorème 5. — a) L'expression (a, b, c, d) représente le point qui est construit de la manière suivante: Nous joignons ab et cd et déterminons l'intersection de ces droites.

b) On a:

$$(a, b, c, d) \times a = \lambda a \times b , \qquad (a, b, a, c) = \mu a ,$$

où λ, μ sont les facteurs $\neq 0$.

La démonstration du théorème *a*) résulte évidemment de la supposition *f*) et des théorèmes 1 et 3.

Le théorème *b*) est la conséquence du théorème *a*).

THÉORÈME 6. — L'équation de la conique qui passe par les points a, b, c, d, e est

$$\left[(a, b, d, e) \times (b, c, e, x)\right] \cdot (c, d, x, a) = 0 .$$

La démonstration: Si nous indiquons par x le point de la conique déterminée par les points a, b, c, d, e il y a le théorème de Pascal dans l'hexagone a, b, c, d, e, x. Le point (a, b, d, e) détermine avec le point (b, c, e, x) la droite de Pascal de l'hexagone mentionné et sur cette droite se trouve aussi le point (c, d, x, a). Cette condition, nécessaire et suffisante pour que le point soit situé sur la conique, est justement écrite par notre équation.

THÉORÈME 7. — La transformation quadratique

$$y \equiv f_1(x) = (x, b, c, d) \times (a, c, b, e) \times (x \times a) \qquad (1)$$

adjoint le point y au point x, et ce point y peut être déterminé par construction linéaire.

Inversement: Le point x appartient au point y par la transformation quadratique

$$x \equiv f_2(y) = y \times (a, c, b, e) \times (c \times d) \times b \times (y \times a) \qquad (2)$$

et ce point peut aussi être construit linéairement. Les points a, b, c sont les points principaux de cette transformation de Cremona et les points d, e appartiennent aux mêmes points d, e par (1) ou (2).

Démonstration: Le deuxième membre de l'équation (1) montre que nous construisons le point y en partant de x, par projection linéaire des points et par intersection de droites. (Voir fig. 1.)

Nous obtiendrons l'équation (2) si nous inversons la construction et si nous écrivons cette construction dans notre symbolique. Il est évident que cette construction réciproque est aussi linéaire.

Si nous posons les valeurs a, b, c dans (1) au lieu de x, nous aurons

$$f_1(a) = 0\,, \qquad f_1(b) = 0\,, \qquad f_1(c) = 0\,.$$

L'équation (2) donne aussi

$$f_2(a) = 0\,, \qquad f_2(b) = 0\,, \qquad f_2(c) = 0\,.$$

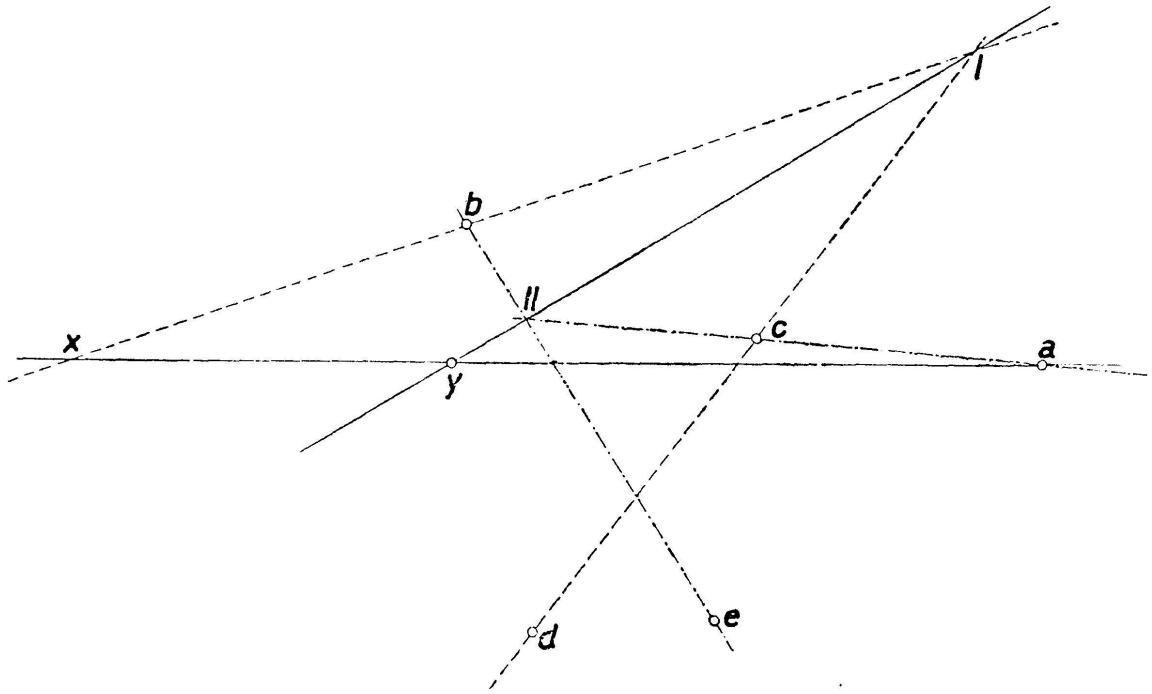

Fig. 1.

Alors: Les points a, b, c sont les points principaux de la transformation. Pour $x = d$, $x = e$ l'équation (1) donne

$$f_1(d) = d\,,$$
$$f_1(e) = e\,.$$

La théorie des transformations de Cremona donne les théorèmes bien connus.

α) La transformation quadratique de Cremona transforme toute conique qui ne passe par aucun point principal dans la quartique rationnelle, qui a les points doubles dans les points principaux et inversement.

β) La transformation quadratique de Cremona transforme toute conique qui passe par le point principal dans la cubique [1]

[1] Ici nous ne considérons pas la droite qui passe par les deux autres points principaux.

rationnelle avec point double en ce point principal de la transformation (et inversement).

THÉORÈME 8. — La construction de la quartique qui est déterminée par les points doubles a, b, c et par les autres points (dans la position générale) d, e, f, g, h est la suivante:

Nous construirons les points

$$f_1(f) = l\,, \qquad f_1(g) = m\,, \qquad f_1(h) = n\,,$$

par la construction linéaire (1) du théorème 7 et la conique K qui passe par les points: d, e, l, m, n. Si y est le point de cette conique, le point x, construit de point y par (2) du théorème 7 est le point de la quartique.

Démonstration: La transformation quadratique (1) du théorème 7 transforme la quartique dans la conique K (après le théorème α)), qui passe par les points adjoints aux points d, e, f, g, h. Ce sont les points d, e (voir le théorème 7) et les points $f_1(f) = 1$, $f_1(g) = m$, $f_1(h) = n$, que nous construirons par la construction linéaire (1). C'est par ces points que la conique K est déterminée.

La transformation quadratique (2) du théorème 7 transforme cette conique K dans la quartique avec les points doubles a, b, c et qui passe par les points d, e, f, g, h (d'après le théorème α)).

En conséquence le point x de la quartique adjoint au point arbitraire y de la conique K est construit linéairement par (2) du théorème 7.

L'équation de la quartique peut aussi fournir la preuve du théorème mentionné. L'équation de la conique K est

$$\big[(d\,,\,e\,,\,m\,,\,n) \times (e\,,\,l\,,\,n\,,\,y)\big] \cdot (l\,,\,m\,,\,d\,,\,y) = 0 \qquad (3)$$

d'après le théorème 6.

Si nous écrivons ici $f_1(x)$ au lieu y, nous aurons l'équation de la quartique cherchée, qui a les points doubles a, b, c, et qui passe par les points d, e, f, g, h.

THÉORÈME 9. — La construction de la cubique, qui est déterminée par le point double a et par les six autres points ordinaires (en position générale) b, c, d, e, f, g est la suivante (fig. 2):

Nous construirons les points $f_1(f) = l$, $f_1(g) = m$ à l'aide de la construction (1) du théorème 7 et la conique K donnée par les points a, d, e, l, m.

Le point x, construit à l'aide de l'équation (2) du théorème 7 en partant du point y de la conique K est le point de la cubique cherchée.

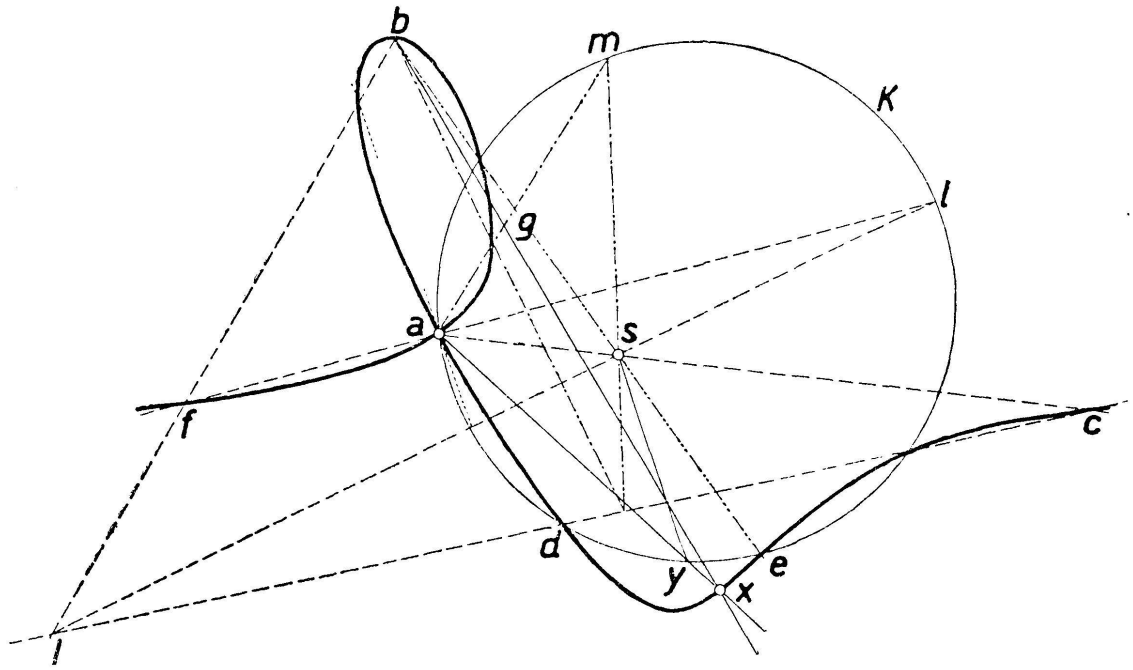

Fig. 2.

La démonstration résulte directement du théorème 7 et de β); elle est analogue à la preuve du théorème 8.

Nous obtiendrons l'équation de la cubique à l'aide de l'équation de la conique K, donnée par les points a, d, e, l, m.

Il y aura

$$\big[(a, d, l, m) \times (d, e, m, y)\big] \cdot (e, l, y, a) = 0 \qquad (3a)$$

d'après le théorème 6.

Si nous posons dans (3a):

$$y = f_1(x)\,, \qquad [(1) \text{ du théorème } 7]$$

et

$$y \times a = \alpha x \times a$$

nous aurons l'équation cherchée

$$\big[(a, d, l, m) \times (d, e, m, f_1(x))\big] \cdot (e, l, x, a) = 0\ . \qquad (4)$$

THÉORÈME 10. — Les droites tangentes de la cubique (4) au point double sont les tangentes de la conique, qui est déterminée par les droites tangentes: $A \equiv (e \times l)$, $B \equiv (e \times m)$, $C \equiv (l \times n)$, $D \equiv (a, b, c, d) \times (a, c, b, e)$, $E \equiv [D \times (d \times e)] \times (a, d, l, m)$.

Démonstration: Si nous écrivons, dans l'équation (4), a au lieu de x et T au lieu de $(a \times x)$ et enfin

$$f_1(x) = (x, b, c, d) \times (a, c, b, e) \times T$$

nous aurons, après un calcul très facile,

$$T \times (e \times l) \times (a, d, l, m) \times (d \times e) \times m \times (a, b, c, d) \times (a, c, b, e) \cdot T = 0 , \tag{5}$$

Les droites T qui satisfont l'équation quadratique (5) enveloppent une conique.

Si nous posons les droites A, B, C, D, E, mentionnées plus haut, successivement, au lieu T, dans (5), nous verrons que ces droites sont tangentes de la conique (5). En conséquence nous obtiendrons les tangentes de la cubique (4) au point a, si nous construisons les deux tangentes possibles de la conique (5) par le point a.

THÉORÈME 11. — La construction linéaire

$$T_x = (a, d, l', m') \times (e, l', a, x) \times (d \times e) \times m' \times (a \times x) \times \\ \times (a, c, x, e) \times (c \times d) \times x ,$$

où

$$l' = (f, x, c, d) \times (a, c, x, e) \times (f \times a)$$
$$m' = (g, x, c, d) \times (a, c, x, e) \times (g \times a)$$

donne la droite tangente en x à la cubique (4).

La démonstration de cette construction résulte de l'équation (3a) de la conique K du théorème 9. Nous construisons sa droite tangente en y et nous transformons cette droite par (2) dans une autre conique.

La tangente en x est T_x.

Une autre démonstration résulte de la construction de la droite tangente en b à la cubique (4).

La construction de la droite T_b résulte de l'équation (4) analogiquement à la construction T_a (voir le théorème 10). Nous aurons:

$$T_b = (a, d, l, m) \times (e, l, a, b) \times (d \times e) \times m \times (a \times b) \times \\ \times (a, c, b, e) \times (c \times d) \times b,$$

où

$$l = (f, b, c, d) \times (a, c, b, e) \times (f \times a)$$
$$m = (g, b, c, d) \times (a, c, b, e) \times (g \times a)$$

après (1) du théorème 7.

Si nous posons partout x au lieu b, nous aurons la construction que nous avions à démontrer.

Prague, janvier 1935.

REMARQUES SUR UN THÉORÈME DE SYLVESTER

PAR

Aloys HERRMANN (Köthen in Anhalt).

Cette Note a pour but d'exposer une méthode qui fait voir qu'on peut étendre les recherches de SYLVESTER [1], *Sur la solution explicite de l'équation quadratique de Hamilton en quaternions ou en matrices du second ordre.*

Soient A, B, C et X des matrices carrées d'ordre $n = 2$; il est démontré que chaque racine caractéristique d'une solution X de l'équation en matrices $AX^2 + BX + C = 0$ est une solution de l'équation algébrique de l'ordre 4 en λ, obtenue en annulant le déterminant $|A\lambda^2 + B\lambda + C|$. En outre, on a fait [2] plusieurs tentatives pour déterminer le nombre des solutions d'une équation en matrices d'ordre $n > 2$.

---

[1] SYLVESTER, *C. R. Acad. Sci.*, Paris, vol. 99 (1884), p. 555-558 et 621-631.

[2] *Ibidem*, p. 13-15; *Phil. Mag.*, vol. 18 (1884), p. 454-458; *Quat. J. math.*, vol. 20 (1885), p. 305-312.