QUELQUES THÉORÈMES SUR LA STABILITÉ DES MOUVEMENTS

QUELQUES THÉORÈMES SUR LA STABILITÉ DES MOUVEMENTS

PAR

Nicolas Bogoliouboff (Kieff).

1. — Envisageons un système dynamique quelconque, isolé des influences extérieures.

D'accord avec les conventions généralement adoptées, nous allons entendre par la *phase* la totalité des grandeurs variables caractérisant complètement l'état dynamique instantané de ce système et afin d'utiliser l'intuition géométrique, nous allons regarder l'ensemble de toutes les phases possibles du système oscillant comme un certain espace dont les points sont ces phases.

Vu que nous allons étudier les systèmes dynamiques les plus généraux, nous ne pouvons pas préciser la nature des « points » de l'espace des phases et, pour cette raison, nous l'allons regarder comme un espace abstrait au sens de M. Fréchet. Nous supposons que cet espace (que nous désignerons désormais par la lettre Ω) est un espace *distancié* et *compact.*

Supposons encore que les mouvements du système dynamique considéré soient régis par des lois strictement causales en ce sens que l'état dynamique du système, à un instant quelconque du temps, détermine complètement tous les états dynamiques assumés par notre système à des instants soit antécédents soit ultérieurs.

Soit P la phase du système à un instant du temps et soit P_t la phase qui sera assumée par ce système après l'écoulement du temps t à partir de cet instant. D'après ce qui vient d'être admis, P_t est une fonction bien définie du temps t et de la phase P.

Nous écrirons donc

$$P_t = T_t(P) \ . \tag{1}$$

Supposons que $T_t(P)$ est une fonction continue du temps t et du point P quelles que soient les valeurs réelles de t et quelles que soient les positions de P intérieures à Ω.

Remarquons ceci en passant que toutes les conditions restrictives que nous venons d'imposer, se trouvent vérifiées par exemple quand il s'agit des mouvements, sur une variété n-dimensionnelle fermée, régis par les équations

$$\frac{dx_k}{dt} = X_k(x_1, \ldots, x_n) \ ; \qquad k = 1, \ldots, n \tag{2}$$

où $X_k(x_1, \ldots, x_n)$ sont les fonctions vérifiant les conditions de Lipschitz sur cette variété.

Cela étant, remarquons qu'en vertu de la relation (1) nous pouvons écrire à la fois:

$$P_{t+s} = T_{t+s}(P) \ ,$$
$$P_{t+s} = T_t(P_s) = T_s(P_t) \ ,$$

d'où il suit l'identité fondamentale

$$T_{t+s}(P) = T_t(T_s(P)) = T_s(T_t(P))$$

que l'on présente ordinairement sous la forme symbolique d'une relation du groupe:

$$T_{t+s} = T_t T_s = T_s T_t \ . \tag{3}$$

Ainsi le problème de l'étude des mouvements du système dynamique considéré est ramené au problème de l'étude d'un groupe T_t, à un paramètre, d'automorphismes de Ω.

2. — Considérons maintenant les fonctions $f(t)$ d'une variable t définies sur tout axe réel en supposant que « les valeurs » de ces fonctions, au lieu d'être les grandeurs numériques, soient les points d'un espace distancié et compact Ω.

Nous dirons qu'une fonction continue $f(t)$ est presque périodique [1] si à tout nombre positif ε on peut faire correspondre un ensemble $\mathfrak{C}_\varepsilon$ relativement dense [2] sur l'axe réel de façon que

$$\rho\{f(t+\tau)\,,\ f(t)\} \leqq \varepsilon\,, \quad \text{si} \quad \tau \subset \mathfrak{C}_\varepsilon\,, \ -\infty < t < +\infty \tag{4}$$

où $\rho(P, Q)$ désigne la distance entre les points P et Q de l'espace considéré Ω.

Comme on le voit bien, la condition de la presque périodicité est présentée ici sous la forme d'une condition bilatérale dans ce sens que l'inégalité (4) doit avoir lieu également pour les valeurs positives et négatives de t.

Or, il serait très facile de la remplacer par une condition unilatérale [3].

Nous pouvons affirmer par exemple que:

Si à tout nombre positif ε on peut faire correspondre un ensemble $\mathfrak{C}_\varepsilon$ relativement dense sur tout axe réel de façon que

$$\rho\{f(t+\tau)\,,\ f(t)\} \leqq \varepsilon\,, \qquad \tau \subset \mathfrak{C}_\varepsilon$$

pour

$$t \geqq 0\,,$$

alors la fonction continue $f(t)$ est presque périodique.

Pour démontrer cette proposition d'ailleurs tout à fait élémentaire, supposons le contraire.

---

[1] On peut donner encore une autre définition de la presque périodicité; à savoir on pourrait dire qu'une fonction $f(t)$ est presque périodique si l'expression $F\{f(t)\}$ est une fonction presque périodique au sens classique de M. Bohr et cela quelle que soit la fonction numérique F (P) du point P, continue dans Ω. D'ailleurs il serait facile de mettre en évidence l'équivalence parfaite de ces deux définitions.

[2] On dit qu'un ensemble $\mathfrak{C}$ est relativement dense sur l'axe réel si l'on peut fixer un nombre positif L de façon que dans chaque intervalle de longueur L se trouve au moins un point de $\mathfrak{C}$.

[3] Il est curieux de constater que dans son article « Stabilität im Liapounoffschen Sinne und Fastperiodizität » (*Math. Zeitschr.*, pp. 708-738, Bd. 36) en étudiant la connexion entre les notions de stabilité et celles de la presque périodicité, A. Markoff écrit « Allen diesen Problemen kommt die Gemeinsame Eigentümlichkeit zu. Es wird allemal verlangt aus gewissen inbezug auf die Variation in der Zeit « einseitigen » Stabilitätseigenschaften der Bewegung eine « zweiseitige » Eigenschaft die Fastperiodizität logisch abzuleiten ».

A. Markoff ignore donc que la propriété de la presque-périodicité elle aussi peut-être regardée comme « einseitige Eigenschaft ».

Nous pouvons indiquer alors un nombre négatif $t_0 < 0$ et un $\tau_0 \subset \mathfrak{E}_\varepsilon$ de façon que

$$\rho\left\{f(t_0 + \tau_0)\ ,\ f(t_0)\right\} = \varepsilon + \delta\ , \qquad \text{où} \qquad \delta > 0\ . \tag{5}$$

Or, l'ensemble $\mathfrak{E}_\varepsilon$ étant relativement dense sur l'axe réel, nous pouvons toujours trouver un nombre positif z tel que

$$t_0 + z > 0\ , \qquad t_0 + \tau_0 + z > 0\ , \qquad -z \subset \mathfrak{E}_{\frac{\delta}{3}}\ . \tag{6}$$

Nous avons alors

$$\rho\left\{f(t_0 + \tau_0)\ ,\ f(t_0)\right\} \leqq \rho\left\{f(t_0 + \tau_0 + z)\ ,\ f(t_0 + z)\right\} + \\ + \rho\left\{f(t_0 + z)\ ,\ f(t_0)\right\} + \rho\left\{f(t_0 + z + \tau_0)\ ,\ f(t_0 + z)\right\}\ ,$$

d'où, en vertu de (6) et en remarquant que

$$t_0 + \tau_0 = (t_0 + \tau_0 + z) - z\ , \qquad t_0 = (t_0 + z) - z\ ,$$

on trouve

$$\rho\left\{f(t_0 + \tau_0)\ ,\ f(t_0)\right\} \leqq \varepsilon + \frac{2}{3}\delta\ ,$$

ce qui est en contradiction avec (5).

Cela étant établi, attirons l'attention sur un théorème démontré par H. Bohr dans le cas des fonctions numériques.

Tout d'abord introduisons la définition de la stabilité uniforme (bilatérale).

Nous dirons qu'une fonction $f(t)$ est uniformément stable si, à chaque nombre positif ε, on peut faire correspondre un nombre positif δ tel que l'inégalité

$$\rho\left\{f(t'')\ ,\ f(t')\right\} \leqq \delta$$

entraîne l'inégalité

$$\rho\left\{f(t + t'')\ ,\ f(t + t')\right\} \leqq \varepsilon$$

valable pour toutes les valeurs réelles de t.

Suivant le théorème de M. Bohr, toute fonction continue uniformément stable est presque périodique.

Il serait très facile d'étendre la démonstration de H. Bohr au cas considéré des fonctions abstraites.

En effet, vu que l'espace Ω est distancié et compact, nous pouvons trouver pour chaque nombre positif δ un certain nombre de sphéroïdes $S_1, S_2, \ldots, S_N$ de diamètre inférieur à δ et cela de façon que

$$\Omega = S_1 + S_2 + \ldots + S_N .$$

Soient $S'_1, S'_2, \ldots, S'_N$ ceux des sphéroïdes $S_1, S_2, \ldots, S_N$ dans chacun desquels il y a au moins un point $f(t)$. Nous pouvons donc indiquer N_1 nombres $t_1, \ldots, t_{N_1}$ de façon que

$$f(t_k) \subset S'_k ; \qquad k = 1, \ldots, N_1 .$$

Soient maintenant n un entier positif ou négatif. On voit bien qu'à cet entier nous pouvons faire correspondre un entier $k_n = 1, \ldots, N_1$ tel que

$$f(n) \subset S'_{k_n} .$$

Par conséquent

$$\rho\{f(n) , f(t_{k_n})\} \leqq \delta$$

d'où, en vertu de la stabilité uniforme,

$$\rho\{f(t + [n - t_{k_n}]) , f(t)\} \leqq \varepsilon , \qquad -\infty < t < +\infty .$$

En remarquant que l'ensemble des grandeurs

$$n - t_{k_n} ; \qquad n = 0 , \pm 1 , \pm 2 , \ldots$$

est relativement dense sur l'axe réel, on s'assure définitivement que $f(t)$ est, en effet, une fonction presque périodique.

Cela étant, introduisons la notion de la stabilité uniforme unilatérale.

Nous dirons par exemple qu'une fonction $f(t)$ est uniformément stable dans la direction positive si à tout nombre positif ε on peut faire correspondre un nombre positif δ tel que l'inégalité

$$\rho\{f(t') , f(t'')\} \leqq \delta$$

entraîne l'inégalité

$$\rho\left\{f(t+t')\ ,\ f(t+t'')\right\} \leqq \varepsilon$$

valable pour $t \geqq 0$.

En utilisant les raisonnements que nous venons de détailler on peut démontrer immédiatement que toute fonction continue et uniformément stable dans la direction positive est presque périodique [1].

3. — Retournons maintenant au problème de l'étude des mouvements du système dynamique considéré au § 1. Avant d'aller plus loin rappelons quelques définitions fondamentales.

Définition I. — Nous dirons qu'un mouvement

$$P_0 \rightarrow T_t(P_0)$$

est presque périodique si l'expression $T_t(P_0)$ est une fonction presque périodique du temps t.

Définition II. — Nous dirons qu'un mouvement $P_0 \rightarrow T_t(P_0)$ est récurrent si, à tout nombre positif ε et à chaque valeur t_0 de la variable t, on peut faire correspondre un ensemble F_{δ, t_0} relativement dense sur l'axe réel de façon que

$$\rho\left\{f(t_0+\tau)\ ,\ f(t_0)\right\} \leqq \delta\ , \qquad \text{si} \qquad \tau \subset F_{\delta, t_0}\ .$$

Définition III. — Nous dirons qu'un mouvement $P_0 \rightarrow T_t(P_0)$ est stable au sens de Liapounoff par rapport à sa propre trajectoire si, à tout nombre positif δ, on peut faire correspondre un nombre positif ε tel que l'inégalité

$$\rho\left\{T_\tau(P_0)\ ,\ P_0\right\} \leqq \delta$$

entraîne l'inégalité

$$\rho\left\{T_{t+\tau}(P_0)\ ,\ T_t(P_0)\right\} \leqq \varepsilon$$

valable pour tout

$$t \geqq 0\ .$$

---

[1] Dans l'article cité de A. Markoff un cas bien particulier de cette simple affirmation (justement le cas des mouvements) se trouve énoncé dans son « Satz I ».

A. Markoff n'a pas remarqué que cette propriété est vraie non seulement pour les mouvements mais aussi pour les fonctions absolument quelconques.

Il faut noter pourtant que dans le texte du « Satz I », il y a un théorème inverse (à savoir que tout mouvement presque périodique est uniformément stable) ne pouvant pas être étendu à des fonctions générales. Or ce théorème, vraiment intéressant, a été démontré longtemps avant A. Markoff par le savant américain Mr. Ph. Franklin.

Corollaire [1]. — De ces définitions il suit que tout mouvement récurrent stable au sens de Liapounoff par rapport à sa propre trajectoire est presque périodique.

On a en effet pour tout $\tau \subset F_{\delta, 0}$ (ou les définitions II et III)

$$\rho\left\{f(t+\tau)\,,\ f(t)\right\} \leqq \varepsilon\,, \quad \text{où} \quad f(t) = T_t(P_0) \quad \text{et où} \quad t \geqq 0\,.$$

En tenant compte de la remarque faite au § 2 on s'assure d'ici que $T_t(P_0)$ une fonction presque périodique de t.

Définition IV. — On dit qu'un mouvement $P_0 \rightarrow T_t(P_0)$ est stable au sens de Liapounoff si, pour tout nombre positif ε, il existe un nombre positif $\delta(\varepsilon)$ tel que l'inégalité

$$\rho(P\,,\ P_0) \leqq \delta$$

entraîne l'inégalité

$$\rho\left\{T_t(P)\,,\ T_t(P_0)\right\} \leqq \varepsilon$$

valable pour tout $t \geqq 0$.

Théorème fondamental. — *S'il existe une mesure* [2] $m(\mathfrak{U})$ *invariante en* T_t, *si cette mesure est positive pour tout ensemble ouvert non vide de* Ω *et si enfin* m (Ω) *est finie, alors tout mouvement stable au sens de Liapounoff est presque périodique.*

Démonstration. — Envisageons un mouvement

$$P_0 \rightarrow T_t(P_0)$$

[1] Cette remarque se trouve dans l'article cité de A. Markoff sous le nom de « Andronow-Wittsche Vermutung ».

A. Markoff n'a pas constaté la banalité de ce « Vermutung » et semble au contraire lui attacher une importance de tout premier ordre en le plaçant à la fin de son article comme une sorte de résultat concluant.

[2] On dit qu'une fonction d'ensemble $m(\mathfrak{U})$ bien définie pour tout ensemble $\mathfrak{U} \subset \Omega$ est une mesure si les conditions suivantes sont remplies:

1° $m(\mathfrak{U}) \geqq 0$;

2° $m(\mathfrak{U}_1) \leqq m(\mathfrak{U}_2)$, si $\mathfrak{U}_1 \subset \mathfrak{U}_2$;

3° $m(\mathfrak{U}) \leqq \sum\limits_{n=1}^{\infty} m(\mathfrak{U}_n)$, si $\mathfrak{U} = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \mathfrak{U}_n$;

4° $m(\mathfrak{U}_1 + \mathfrak{U}_2) = m(\mathfrak{U}_1) + m(\mathfrak{U}_2)$, si la distance entre $\mathfrak{U}_1$, $\mathfrak{U}_2$ n'est pas nulle;

5° $m(\mathfrak{U}) = \liminf\limits_{A \subset O} m(O)$, O désignant des ensembles ouverts.

stable au sens de Liapounoff et considérons un sphéroïde S décrit autour du point P_0 avec le rayon égal à $\delta = \delta\left(\frac{\varepsilon}{4}\right)$.

Remarquons d'abord qu'il n'existe qu'un nombre fini de valeurs de la variable t pour lesquelles $T_t S$ sont deux à deux sans points communs.

Soit en effet $(t_1, t_2, \ldots, t_N)$ un ensemble de valeurs de t jouissant de cette propriété. Nous avons alors

$$m(\Omega) \geqq m(T_{t_1}S + T_{t_2}S + \ldots T_{t_N}S) = m(T_{t_1}S) + \ldots + \\ + m(T_{t_N}S) \geqq Nm(S)$$

de sorte que le nombre maximum de telles valeurs de t ne peut pas surpasser

$$\frac{m(\Omega)}{m(S)} .$$

Cela étant, soit $t_1, \ldots, t_N$ un système de valeurs de t, tel que $T_{t_1}S, \ldots, T_{t_N}S$ sont deux à deux sans points communs et tel que tout $T_t S$ doive avoir les points communs au moins avec un de ces ensembles $T_{t_1}S, \ldots, T_{t_N}S$.

Vu cette propriété caractéristique à chaque entier n nous pouvons faire correspondre un nombre $k_n = 1, \ldots, N$, de façon que l'ensemble produit

$$T_n S \cdot T_{k_n} S$$

ne soit pas vide.

Vu la relation du groupe (3) on conclut d'ici que l'ensemble produit

$$T_t S \cdot T_{(n-k_n)+t} S$$

lui aussi n'est pas vide et cela quelle que soit la valeur réelle de t.

D'autre part, il est clair que l'ensemble dénombrable $n - k_n$, $n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$ est relativement dense sur l'axe réel. Ainsi nous voyons qu'il existe un ensemble $\mathfrak{E}_\varepsilon$ relativement dense sur l'axe réel, tel que

$$T_t S \cdot T_{t+\tau} S , \qquad -\infty < t < +\infty$$

ne soient pas vides quand $\tau \subset \mathfrak{E}_\varepsilon$.

Or le sphéroïde S ne contenant que les points

$$\rho(P, P_0) \leqq \delta\left(\frac{\varepsilon}{4}\right)$$

et le mouvement considéré $P_0 \rightarrow T_t(P_0)$ étant stable au sens de Liapounoff on conclut que, si $t > 0$, $t + \tau > 0$, alors les ensembles $T_t S$, $T_{t+\tau} S$ ne contiennent que les points pour lesquels on a respectivement

$$\rho\{P, T_t(P_0)\} \leqq \frac{\varepsilon}{4},$$

$$\rho\{P, T_{t+\tau}(P_0)\} \leqq \frac{\varepsilon}{4}.$$

Les diamètres de $T_t S$, $T_{t+\tau} S$ ne surpassent donc pas $\frac{\varepsilon}{2}$ et par suite $T_t S \cdot T_{t+\tau} S$ n'étant pas vide, la distance maximum entre les points de ces ensembles ne surpasse pas ε. D'ici, vu que

$$T_t(P_0) \subset T_t S \ ; \qquad T_{t+\tau}(P_0) \subset T_{t+\tau} S$$

on trouve

$$\rho\{T_t(P_0), \ T_{t+\tau}(P_0)\} \leqq \varepsilon \tag{7}$$

si bien entendu

$$t \geqq 0, \quad t + \tau \geqq 0, \quad \tau \subset \mathfrak{C}_\varepsilon . \tag{8}$$

Pour démontrer complètement la presque périodicité du mouvement $P_0 \rightarrow T_t(P_0)$, il ne nous faut donc qu'établir que l'inégalité (7) reste valable, même si les conditions

$$t \geqq 0, \quad t + \tau \geqq 0$$

ne sont pas vérifiées.

A cet effet, supposons le contraire.

Nous pouvons indiquer alors des nombres t_0, τ_0 tels que

$$\rho(T_{t_0}(P_0), T_{t_0+\tau_0}(P_0)) = \varepsilon + \eta, \quad \tau_0 \subset \mathfrak{C}_\varepsilon, \quad \eta > 0. \tag{9}$$

Or, de (7), il suit qu'on peut toujours trouver une suite $\tau_n \rightarrow \infty$ telle que

$$P_0 = \lim_{n \to \infty} T_{\tau_n}(P_0)$$

(on pourrait prendre par exemple $\tau_n \subset \mathfrak{C}_{\frac{1}{n}}$, $\tau_n > n$).

Nous avons par conséquent

$$\mathrm{T}_{t_0}(\mathrm{P}_0) = \lim_{\tau_n \to \infty} \mathrm{T}_{t_0+\tau_n}(\mathrm{P}_0)$$

$$\mathrm{T}_{t_0+\tau_0}(\mathrm{P}_0) = \lim_{\tau_n \to \infty} \mathrm{T}_{t_0+\tau_0+\tau_n}(\mathrm{P}_0)$$

de sorte que

$$\rho\left\{\mathrm{T}_{t_0}(\mathrm{P}_0)\,,\ \mathrm{T}_{t_0+\tau_0}(\mathrm{P}_0)\right\} = \lim_{n \to \infty} \rho\left\{\mathrm{T}_{t_0+\tau_n}(\mathrm{P}_0)\,,\ \mathrm{T}_{t_0+\tau_0+\tau_n}(\mathrm{P}_0)\right\}.$$

Donc vu qu'à partir d'un certain n

$$\tau_n + t_0 > 0\,, \qquad \tau_n + t_0 + \tau_0 > 0\,,$$

on s'assure que

$$\rho\left\{\mathrm{T}_{t_0}(\mathrm{P}_0)\,,\ \mathrm{T}_{t_0+\tau_0}(\mathrm{P}_0)\right\} \leqq \varepsilon$$

et nous voilà arrivé à une contradiction.

Notre théorème est par conséquent démontré. Envisageons à titre d'exemple un système dynamique conservatif de la mécanique classique, à n degrés de liberté, régi par les équations canoniques

$$\frac{dp_k}{dt} = -\frac{\partial \mathrm{H}}{\partial q_k}\,, \quad \frac{dq_k}{dt} = \frac{\partial \mathrm{H}}{\partial p_k}\,; \qquad k = 1\,, \ldots\,, n\,.$$

Supposons que les variétés de l'énergie constante

$$\mathrm{H}(q_1\,, \ldots\,, q_n\,, p_1\,, \ldots\,, p_n) = \mathrm{E}$$

soient fermées et suffisamment régulières.

Alors du théorème démontré il suit que tout mouvement stable au sens de Liapounoff est presque périodique.

Paris, février 1936.