I. — Leur relation avec les carrés d'Euler.

Objekttyp: **Chapter**

Zeitschrift: **L'Enseignement Mathématique**

Band (Jahr): **34 (1935)**

Heft 1: **L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE**

PDF erstellt am: **16.07.2024**

CARRÉS LATINS SEMI-DIAGONAUX

PAR

A. MARGOSSIAN, Ingénieur (Ecole des Ponts et Chaussées de Paris) [1].

I. — LEUR RELATION AVEC LES CARRÉS D'EULER.

Soit un carré de n^2 cases; si l'on range les n premiers nombres naturels dans chacune des lignes de ce carré, de façon que ces n nombres figurent aussi *tous* dans chacune de ses colonnes, on aura construit ce que l'on nomme un *carré latin.* La quantité n est la *racine* ou *module* du carré.

Si ces n nombres figurent aussi tous dans chacune des deux diagonales, on dit que le carré latin est *diagonal.* Si une seule de ces diagonales satisfait à cette condition [2], le carré est *semi-diagonal.* La semi-diagonalité peut être *droite* ou *gauche*; la distinction est importante, on la définira bientôt.

Je ne m'occuperai ici que des carrés latins que j'appelle *réguliers* et qui sont seuls intéressants. Un carré régulier est celui dont chaque ligne se déduit de celle qui la précède suivant un *procédé uniforme.* En d'autres termes, les lignes d'un carré ne sont que des permutations différentes des n éléments qui entrent dans sa constitution; dans un carré régulier, une *même permutation* permet de déduire chaque ligne d'une autre d'entre elles.

[1] M. A. MARGOSSIAN est décédé en novembre 1931 à Strobl près d'Ischl (Autriche). Bien que gravement atteint par la maladie, il poursuivit jusqu'à ses derniers jours ses intéressantes recherches sur les carrés latins et les carrés d'Euler. Le présent travail fait suite à celui que nous avons publié dans le tome XXX (p. 41-49). Sa dernière note, intitulée « Des carrés d'Euler de racines ou de modules premiers », paraîtra dans un prochain fascicule. — *N. d. l. R.*

[2] Pour simplifier le langage, je qualifierai souvent de *magique* la diagonale satisfaisant à cette condition.

Dès que l'on s'est donné la *première ligne* ou *base* du carré et que l'on a défini la permutation à adopter (je dois prévenir le lecteur que toutes les permutations ne peuvent pas être utilisées), le carré est entièrement déterminé. Cette première ligne ou base est un arrangement arbitraire des n premiers nombres; pour pouvoir comparer les carrés entre eux, on adopte en général, à cet effet, la *suite naturelle* de ces n nombres.

La formation la plus commode, autrement dit le système le plus commode de permutations est celui que l'on désigne sous le nom de *permutations circulaires*. Il consiste, étant donnée la première colonne du carré que l'on peut adopter d'une manière arbitraire, à inscrire les nombres, à partir du premier élément de chaque ligne, dans l'ordre même qu'ils ont dans la base à compter de cet élément.

Voici par exemple le carré latin de module 9, dans la première colonne duquel on a donné aux nombres l'ordre même de ceux de la base.

1	2	3	4	5	6	7	8	9
2	3	4	5	6	7	8	9	1
3	4	5	6	7	8	9	1	2
4	5	6	7	8	9	1	2	3
5	6	7	8	9	1	2	3	4
6	7	8	9	1	2	3	4	5
7	8	9	1	2	3	4	5	6
8	9	1	2	3	4	5	6	7
9	1	2	3	4	5	6	7	8

On remarquera que seule la diagonale *partant de l'origine* contient tous les nombres; le carré est donc semi-diagonal. Je propose de dire, pour simplifier le langage, qu'il est *semi-diagonal droit*, par opposition au carré *semi-diagonal gauche*, quand c'est la seconde diagonale qui jouit de cette propriété. Ces définitions étaient nécessaires pour la facile compréhension de ce qui suit.

Soit maintenant (a) la première colonne d'un carré latin construit par permutations circulaires et ayant pour base la série naturelle. Cette première colonne est supposée arbitrairement ordonnée. Inscrivons sous ses termes ceux de la série ordonnée

$$0 \,.\, 1 \,.\, 2 \,.\, 3 \,.\,.\,.\,.\,.\,.\, (n-1)$$

et faisons les *sommes des éléments superposés*[1]. Ces sommes sont évidemment les éléments de la première diagonale, dans l'ordre même où on les rencontre en descendant de l'origine. Si ces sommes sont toutes différentes, le carré sera pour le moins *semi-diagonal droit.*

Les éléments de la deuxième diagonale s'obtiendront en retranchant des termes de (a), respectivement ceux de la série naturelle des n premiers nombres. Ces différences sont les éléments cherchés, dans l'ordre même qu'ils ont dans le carré, à partir de l'élément n de la base. Si elles donnent tous les nombres 1 à n, le carré est *semi-diagonal gauche.*

Lorsqu'une série (a) satisfait à cette dernière condition, on démontre qu'elle définit *un carré d'Euler.*

Je ne m'étendrai pas sur cette démonstration qui exigerait de longs développements; mais il me faut montrer comment une telle série (a) permet de construire le carré eulérien [2].

Un carré d'Euler résulte de l'association terme à terme de *deux carrés latins réguliers.*

---

[1] Il faut se rappeler que ces sommes sont des congruences de module n et qu'il est nécessaire de les diminuer de n lorsqu'elles sont supérieures à ce nombre. Par analogie, les différences, dont il sera question ci-après, devront être augmentées de n, lorsqu'elles seront ≤ 0.

[2] Je dois, pour le lecteur qui ignore les carrés d'Euler, en donner ici la notion. Considérons le groupe d'éléments composés chacun de deux nombres ou *indices* et qui forment la figure suivante (ces éléments sont les arrangements deux à deux, avec répétition des n nombres 1 à n):

$$\begin{array}{cccccc}
11 & 12 & 13 & 14 & \ldots\ldots & 1\,n \\
21 & 22 & 23 & 24 & \ldots\ldots & 2\,n \\
31 & 32 & 33 & 34 & \ldots\ldots & 3\,n \\
41 & 42 & 43 & 44 & \ldots\ldots & 4\,n \\
\cdot & \cdot & \cdot & \cdot & & \cdot \\
\cdot & \cdot & \cdot & \cdot & & \cdot \\
\cdot & \cdot & \cdot & \cdot & & \cdot \\
n1 & n2 & n3 & n4 & \ldots\ldots & n\,n
\end{array}$$

On remarquera que les éléments dans chaque ligne ont même premier indice, tandis que dans chaque colonne, ce sont les seconds indices qui sont identiques. Ces n^2 éléments sont tous différents; si on les distribue dans un carré de n^2 cases, *de façon qu'on ne trouve pas un premier ou bien un second indice deux fois répété* dans une quelconque ligne ou colonne des rangées du carré, on aura construit un carré d'Euler. J'ajouterai incidemment que si n est premier, il suffit que chaque rangée du carré d'Euler soit constituée par la suite des éléments que rencontre une ligne inclinée (non parallèle à l'une des deux directions principales du groupe) unissant deux quelconques des éléments de cette figure que l'on doit supposer indéfiniment reproduite de façon à couvrir tout le plan.

Je ferai observer ici que le problème des carrés d'Euler ne consiste pas à construire des carrés, fussent-ils nouveaux ou inédits, mais à épuiser tous ceux que produit une racine donnée. La méthode que je fais connaître dans cette note donne la solution complète en ce qui concerne les modules premiers.

Si l'on veut, ainsi qu'il est d'usage, que la base du carré d'Euler soit la série naturelle

$$11 \,.\, 22 \,.\, 33 \,.\, 44 \,.\, .\, .\, .\, .\, .\; nn$$

les deux carrés latins composants *ne doivent différer que par l'ordre de leurs lignes*, leurs bases étant la série naturelle.

Le lecteur est prié d'admettre ces propositions, dont la démonstration ne saurait être placée ici.

Un carré d'Euler résultant de l'association de deux carrés latins, j'adopte comme *carré des premiers indices* celui dont la première colonne est ordonnée suivant la série naturelle. Dans le module 7 par exemple, le carré des premiers indices sera

$$\begin{array}{ccccccc} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 1 \\ 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 1 & 2 \\ 4 & 5 & 6 & 7 & 1 & 2 & 3 \\ 5 & 6 & 7 & 1 & 2 & 3 & 4 \\ 6 & 7 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 7 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \end{array}$$

Le problème des carrés d'Euler se ramène ainsi à la détermination du carré latin des seconds indices.

Partant des deux conventions précédentes, à savoir:

1° La base du carré eulérien devant être

$$11 \quad 22 \quad 33 \quad 44 \,.\, .\, .\, .\, .\, .\; nn$$

chacun des deux carrés composants doit avoir pour base la série naturelle.

2° La première colonne du carré latin des premiers indices est identique à sa base, c'est-à-dire que les nombres y sont rangés dans leur ordre naturel, il suffit de connaître la *première colonne* du carré des seconds indices pour définir sans ambiguité le carré d'Euler, puisque cette première colonne définit entièrement la situation de tous les éléments de ce carré latin des seconds indices.

Ce qui précède étant bien compris, on peut démontrer que si un carré latin *est semi-diagonal gauche, sa première colonne définit un carré d'Euler.* Réciproquement si, *dans un carré d'Euler*, les premiers indices dans la première colonne sont rangés dans leur ordre naturel, le carré des seconds indices est semi-diagonal gauche.

Avant d'aller plus loin, je dois encore énoncer, sans les démontrer, certaines propositions importantes [1] que le lecteur est prié d'admettre au moins provisoirement.

1° Le nombre des carrés latins réguliers ayant une base donnée et essentiellement distincts, c'est-à-dire irréductibles entre eux, est, *pour un module premier* n, égal à $(n-2)!$ C'est aussi le nombre des permutations différentes que l'on peut adopter pour leur construction.

2° Chacun de ces carrés latins donne naissance à un groupe distinct de carrés d'Euler; il y a donc $(n-2)!$ groupes différents de carrés eulériens d'un module n premier.

On saura qu'il suffit de connaître un seul de ces groupes pour pouvoir déterminer tous les autres.

3° On peut toujours ramener aux permutations circulaires un mode régulier de générations d'un carré latin de module premier, à la condition de modifier convenablement la base de ce carré.

4° Pour les modules *impairs non premiers*, les divers groupes de carrés eulériens que l'on pourrait constituer sont tout à fait indépendants les uns des autres. Il n'est pas possible de réduire à une même formation les carrés latins correspondants à ces divers groupes.

---

[1] Je préviens le lecteur que je possède la démonstration de toutes les propositions que je me suis borné à citer ici.

Je donne ci-après, à titre d'exemple, trois carrés d'Euler appartenant respectivement aux modules 7, 9 et 11

11	22	33	44	55	66	77
23	34	45	56	67	71	12
36	47	51	62	73	14	25
42	53	64	75	16	27	31
57	61	72	13	24	35	46
65	76	17	21	32	43	54
74	15	26	37	41	52	63

11	22	33	44	55	66	77	88	99
28	39	41	52	63	74	85	96	17
37	48	59	61	72	83	94	15	26
45	56	67	78	89	91	12	23	34
54	65	76	87	98	19	21	32	43
69	71	82	93	14	25	36	47	58
73	84	95	16	27	38	49	51	62
86	97	18	29	31	42	53	64	75
92	13	24	35	46	57	68	79	81

11	22	33	44	55	66	77	88	99	10.11	11.11
23	34	45	56	67	78	89	9.10	10.11	11.1	12
35	46	57	68	79	8.10	9.11	10.1	11.2	13	24
48	59	6.10	7.11	81	92	10.3	11.4	15	26	37
5.10	6.11	71	82	93	10.4	11.5	16	27	38	49
62	73	84	95	10.6	11.7	18	29	3.10	4.11	51
76	87	98	10.9	11.10	1.11	21	32	43	54	65
8.11	91	10.2	11.3	14	25	36	47	58	69	7.10
94	10.5	11.6	17	28	39	4.10	5.11	61	72	83
10.7	11.8	1.9	2.10	3.11	41	52	63	74	85	96
11.9	1.10	2.11	31	42	53	64	75	86	97	10.8

On voit par ces exemples le mécanisme de la construction, qui est des plus simples. Il sera facile pour le lecteur de rectifier les erreurs, qui pourraient se glisser en cours d'impression.

Je donnerai encore la première colonne du carré des seconds indices de quelques carrés d'Euler pour les mêmes modules. On pourra aisément les construire.

Module 7.

1 . 4 . 2 . 7 . 6 . 3 . 5
1 . 5 . 7 . 3 . 6 . 4 . 2
1 . 6 · 4 . 3 . 7 . 2 . 5
1 · 6 · 5 . 2 . 4 . 7 . 3

Module 9.

1 . 4 . 9 . 8 . 3 . 7 . 6 . 2 . 5
1 . 5 . 4 . 9 . 3 . 8 . 2 . 7 . 6
1 . 8 . 7 . 6 . 4 . 2 . 5 . 9 . 3
1 . 9 . 2 . 7 . 6 . 8 . 3 . 5 . 4

Module 11.

1 . 3 . 6 . 2 . 9 . 11 . 4 . 10 . 8 . 5 . 7
1 . 3 . 2 . 6 . 10 . 9 . 11 . 4 . 7 . 5 . 8
1 . 3 . 2 . 9 . 7 . 10 . 5 . 11 . 4 . 6 . 8
1 . 3 . 5 . 8 . 2 . 11 . 10 . 7 . 4 . 6 . 9
1 . 3 . 9 . 6 . 2 . 11 . 10 . 7 . 5 . 8 . 4
1 . 3 . 8 . 7 . 11 . 10 . 5 . 4 . 6 . 9 . 2

Voici encore quelques séries de module 13.

1 . 8 . 6 . 11 . 13 . 5 . 12 . 4 . 10 . 7 . 9 . 3 . 2
1 . 11 . 7 . 10 . 3 . 13 . 8 . 5 . 12 . 9 . 6 . 4 . 2
1 . 10 . 8 . 13 . 11 . 4 . 6 . 9 . 12 . 7 . 5 . 3 . 2
1 . 3 . 12 . 10 . 13 . 11 . 9 . 7 . 6 . 8 . 5 . 2 . 4
1 . 7 . 11 . 13 . 1 . 12 . 5 . 10 . 3 . 9 . 8 . 2 . 4
1 . 6 . 13 . 9 . 12 . 4 . 2 . 10 . 8 . 11 . 7 . 5 . 3

Après les explications qui précèdent, le problème des carrés d'Euler d'un module premier consiste à déterminer les carrés latins semi-diagonaux gauches que fournit ce module. Il me reste à montrer le procédé à employer à cet effet.

II. — Etude sommaire des carrés latins semi-diagonaux et détermination des carrés d'Euler.

Je rappelle que ces carrés latins doivent être construits par permutations circulaires.

Considérons le carré latin ci-après [1]:

1	2	3	4	5	6	7		2	3	4	5	6	7	1	
2	3	4	5	6	7	1		4	5	6	7	1	2	3	
4	5	6	7	1	2	3		6	7	1	2	3	4	5	
6	7	1	2	3	4	5	(1)	3	4	5	6	7	1	2	(2)
3	4	5	6	7	1	2		7	1	2	3	4	5	6	
7	1	2	3	4	5	6		5	6	7	1	2	3	4	
5	6	7	1	2	3	4		1	2	3	4	5	6	7	

On constate qu'il est semi-diagonal droit. Transportons sa base sous le carré, nous aurons la figure (2).

Si nous lisons ce carré de bas en haut, nous voyons que, sous cette forme, il est semi-diagonal gauche. C'est-à-dire que si l'on inverse bout pour bout les $(n - 1)$ derniers termes d'une série déterminant la semi-diagonalité droite du carré latin, la nouvelle série lui donnera la semi-diagonalité gauche.

[1] Le fait que l'on a pris comme exemple un carré de module 7 ne nuit aucunement à la généralité des conclusions auxquelles on aboutit.