II. Application a la notion du continu.

Objekttyp: **Chapter**

Zeitschrift: **L'Enseignement Mathématique**

Band (Jahr): **34 (1935)**

Heft 1: **L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE**

PDF erstellt am: **17.09.2024**

native suivante: Est-ce que le mathématicien *invente* ses objets et propositions ou est-ce qu'il les *découvre* ? Il invente suivant les idéalistes, il découvre suivant les réalistes. E. T. Bell a fait dernièrement une expérience intéressante dans cette direction [1]. Il a posé, au sujet des théorèmes de la géométrie élémentaire, la question précédente à environ 300 étudiants; les étudiants des sciences physiques et naturelles et les techniciens répondirent presque tous « le mathématicien invente », tandis que les mathématiciens purs se déclarèrent pour la « découverte ». Si les objets mathématiques préexistent aux efforts des mathématiciens, comme l'Amérique à la découverte de Christophe Colomb, alors la description axiomatique de ces objets est efficace et suffisante pour les caractériser d'une manière univoque, même si elle n'aide pas à obtenir une construction ou une reconstruction (création d'un modèle). Une image peut être ici utile: chaque bout de ficelle dans un peloton désespérément embrouillé devient parfaitement accessible au contrôle après une description complète du parcours du peloton, même si l'on n'arrive pas à le débrouiller et à le dénouer, c'est-à-dire à isoler constructivement les bouts particuliers.

II. Application a la notion du continu.

C'est peut-être le plus ancien et en même temps le plus important des problèmes que posent les fondements des mathématiques que de construire un pont au-dessus du précipice qui s'étend entre deux natures: d'une part la nature *discrète*, *qualitative*, *combinatoire*, *individuelle* de l'*arithmétique* et surtout de la suite des nombres naturels (région du dénombrement), et d'autre part la nature *cohérente*, *quantitative*, *homogène* du *continu* géométrique et analytique, par exemple de la totalité des nombres réels (région de la mesure) [2]. Ce problème fonda-

---

[1] Voir *Scientific Monthly* **32**, 193-209 (1931).

[2] Voir p. ex. H. Freudenthal dans *Euclides* **8**, 89-98 (1932), puis le recueil « Continu et Discontinu » (par Chevalier, Carlheinc, etc.): *Cahiers de la nouvelle journée*, N° 15 (Paris, 1929) dans lequel on traite aussi des relations de notre problème aux sciences naturelles et à la théorie de la connaissance. Un historique de cet antagonisme se trouve dans la conférence de H. Weyl: Die Stufen des Kontinuums (Jena, 1931), laquelle me paraît cependant contestable sous certains rapports.

mental est à la base des paradoxes connus de Zénon d'Elée et de certains sophistes. Malgré les efforts des sciences philosophiques, mathématiques et aussi théologiques nous n'y avons guère avancé pendant plus de deux mille ans. En tout cas nous sommes très loin d'avoir construit un pont satisfaisant entre les nombres, qui représentent des individus aux propriétés caractéristiques pour chacun d'eux, et les points uniformément répartis dans la « bouillie » fluide du continu.

Si l'on peut en général (mais non pas sans exception) attribuer à l'antiquité la tendance à concevoir les notions et faits combinatoires sous le jour de l'analyse, c'est cependant la tendance opposée, celle de l'arithmétisation de l'analyse et de la géométrie, qui règne dans les mathématiques modernes. Cette dernière s'est manifestée bien avant que la lutte autour des fondements se soit enflammée à nouveau au début de ce siècle. Dans cette direction-là, le pas le plus décisif a été fait par WEYL (1918-20) dans sa première théorie du continu (du continu « atomistique »). Là WEYL développe également sa doctrine dans le sens du postulat « existence = constructibilité ». Le caractère très conséquent de cette théorie en trace les limites. Cette théorie prend — en refusant l'intuition géométrique — comme donnée initiale le système des nombres rationnels et indique une suite de procédés bien définis de construction qui aboutissent aux éléments admissibles du continu, ayant une raison d'être, donc à certains nombres réels. Le continu composé de ces éléments et d'eux seulement, porte le nom du continu « atomistique » parce qu'il consiste en points isolés, non cohérents au sens mathématique (quoique denses sur tout intervalle, donc cohérents au sens de l'intuition ordinaire, comme la totalité des points rationnels). Evidemment WEYL ne peut plus s'imaginer, comme DÉMOCRITE et les anciens atomistes, qu'il épuise au moyen de ce « continu discontinu » le continu homogène donné intuitivement. Ayant désespéré des essais d'arriver à une arithmétisation constructive du continu intuitif, WEYL met à sa place son continu (plus étroit, mais constructivement concevable et « défini en extension ») « qui extrait de la bouillie fluide du continu intuitif une multitude (dense) de gouttes atomiques ».

H. WEYL reconnaît avec BROUWER que la totalité des nombres réels ne peut pas être construite d'une manière purement arithmétique — idée que l'on retrouve dans les écrits de HÖLDER qui remontent à 40 ans. Cependant BROUWER ne se contente pas d'un pseudo-continu atomistique et introduit à la place des points des « suites de choix », dans le sens d'une continuation indéfinie et arbitraire du procédé de bi-section de chaque intervalle partiel du continu. WEYL aussi s'est rallié plus tard à ce point de vue. Sauf les cas exceptionnels où l'on peut *construire* des points (classe qui comprend par exemple tous les nombres algébriques), la suite de choix se forme d'une manière non-constructive. Pour cette raison et aussi à cause de l'écoulement du temps — auquel, d'après l'interprétation néointuitionniste, le devenir d'une suite de choix est essentiellement lié — une suite de choix particulière ne représente pas quelque chose de définitif, seulement un devenir, pas un être. Pour les nombres naturels, au contraire, chaque élément est bien déterminé et c'est la totalité de ces nombres qui n'est pas un être donné et définitif, comme nous l'avons déjà mentionné. Le continu conçu de cette manière est un « milieu de libre devenir »; tant les points construits que les suites de choix en font partie. Mais ce continu n'est *plus composé de points*, il n'est pas — comme dans la théorie de WEIERSTRASS et CANTOR — de son essence de contenir des éléments, mais d'embrasser des parties, encore divisibles sans limite et restant toujours continues.

D'après cela la disjonction « deux points doivent être ou bien coïncidents ou bien distincts » ne s'impose plus; c'est surprenant mais parfaitement conséquent. Il reste un troisième état entre ces deux, la possibilité tierce mentionnée plus haut qui dépend de notre degré de connaissances en ce moment. D'après BROUWER on peut donner un exemple simple d'un couple de points, qui, étant données nos connaissances actuelles, ne peuvent être déclarés ni distincts ni identiques: Soit, dans le développement décimal de π, k le rang décimal où commence, pour la première fois, la suite de chiffres 1 2 3 4 5 6 7 8 9. (Nous ne sommes pas renseignés si un tel k existe.) Définissons ensuite un nombre réel ρ par $\rho = \pi + 10^{-k}$, alors le développement décimal de ρ peut être écrit de proche en proche. En particulier $\rho = \pi$ est vrai si une démonstration générale nous a appris que dans le développement décimal de π la suite précitée n'apparaîtra jamais. En tout cas ρ est univoquement déterminé, mais on ne peut pas affirmer d'après des principes purement constructifs que ρ est ou bien différent de π (car il faudrait avoir trouvé le nombre k) ou bien égal à π (ce qui exigerait que la démonstration générale mentionnée soit donnée). Le *tertium non datur* est automatiquement supprimé parce que les membres de la disjonction ne se correspondent pas comme p et non-p, comme une proposition et sa négation. Le même doute est possible pour chaque proposition générale, parce que la négation d'une proposition générale (« tous les p sont q ») représente une proposition purement existencielle. Cette négation est, de ce fait, dépourvue de sens pour l'intuitionnisme qui limite l'existence à la construction.

Le problème de la nature du continu se présente sous une forme complètement différente au point de vue axiomatique. Ici la non-contradiction garantit l'existence; en plus, il semble permis de se référer à un fond absolu d'idées platoniciennes tant que la démonstration de la non-contradiction n'est pas fournie — comme, par exemple, pour le continu. Ayant accepté cette attitude Georg CANTOR a pu donner la première description *exhaustive* du continu linéaire en se servant de la relation d'ordre. Il le décrit comme un ensemble parfait dans lequel un sous-ensemble dénombrable est dense. Cette nouvelle attitude ressort plus explicitement encore si l'on fait abstraction de l'ordre. On considère alors le continu (qui est facile à mettre en rapport avec la totalité de tous les *ensembles possibles de nombres naturels*) comme l'ensemble $\mathrm{U} = \mathfrak{U}\,\mathrm{N}$ de tous les sous-ensembles d'un ensemble dénombrable, par exemple de l'ensemble N des nombres naturels. Or, on ne peut *construire* qu'une infinité dénombrable de sous-ensembles de N; et ce serait un retour au continu atomistique de vouloir se restreindre à cela. Mais nous arriverons sans difficulté à l'ensemble non dénombrable désiré en considérant l'ensemble dénombrable N et ses sous-ensembles comme préexistants, comme des objets achevés et donnés et indépendants de toutes les opérations qu'on aurait pu leur faire subir (ou bien en employant l'axiome de réductibilité de RUSSELL qui produit le même effet). La méthode diagonale de CANTOR — qui, chose surprenante, a fait dernièrement l'objet d'investigations très critiques [1] — est alors soustraite à toutes les objections et nous garantit que notre continu est vraiment plus que dénombrable. Nous sommes de même sûrs que la formation de certains sous-ensembles de U ne pourra modifier les éléments de U par exemple, c'est-à-dire les sous-ensembles de N, et l'on échappe aux circonstances fâcheuses qui se sont révélées dans le paradoxe de RICHARD. Une telle influence est exclue, même si l'on emploie un sous-ensemble de U — ou encore U lui-même — pour déterminer un élément de U qui est peut-être un élément du sous-ensemble en question. De telles définitions non-prédicatives n'ont pas lieu de nous inquiéter, parce que l'élément en question ne doit pas son existence à notre détermination, mais existe indépendamment de la manière particulière de l'introduire. Il ne s'agit donc pas d'une *construction*, qui évidemment devrait être prédicative, mais d'une *description* et celle-ci peut être faite univoquement même par une détermination non-prédicative.

Enfin, ce point de vue nous conduit à faire mention de l'attitude moyenne de POINCARÉ, auquel nous devons d'avoir insisté sur les particularités des définitions non-prédicatives. POINCARÉ [2] fait un bout important du chemin avec CANTOR; il donne lui-même (1909) une modification remarquable de la méthode diagonale de CANTOR et insiste d'une façon convaincante sur la différence essentielle des classifications d'une part dans ce procédé diagonal et de l'autre dans le paradoxe de RICHARD, qui paraît si semblable. POINCARÉ, on le sait, soutenait la thèse « existence = non-contradiction »; malgré cela dans l'alternative « découverte ou invention des objets mathématiques » il était entièrement du côté de l'invention et ne pouvait

---

1 P. ex. A. F. BENTLEY, Linguistic analysis of mathematics (Bloomington Ind., 1932); P. W. BRIDGMAN, A physicist's second reaction to Mengenlehre, dans *Scripta Mathem.* **2**, 101-117 et 224-234 (1934). Cf. mon article dans le Vol. 25 des *Fundamenta Mathematicæ*.

2 POINCARÉ était d'ailleurs un des premiers qui ait appliqué les découvertes de CANTOR sur la théorie des ensembles à des problèmes de la théorie des fonctions. (Ce qui est remarquable étant donné ses attaques ultérieures contre le « Cantorisme » et l'infini actuel en général.) Il a même traduit en français une série de mémoires de CANTOR pour les *Acta Mathematica*; voir ma biographie de GEORG CANTOR, *Jahresb. Deutschen Math. Ver.* **39**, 189-266 (1930; paru aussi séparément: Leipzig u. Berlin, 1930), p. 208.

pas, pour cette raison, attribuer sans autres l'existence aux objets déterminés non-prédicativement. Il faut, par exemple, prévoir la possibilité que d'un sous-ensemble de U que l'on vient de former découlent des nouveaux éléments de U qui auparavant n'étaient pas connus, ou, comme le faisait remarquer POINCARÉ, qu'à l'intérieur du domaine de nos objets mathématiques, domaine irréprochablement délimité par les axiomes et assuré contre les contradictions extérieures, paraissent des objets nouveaux et même suspects d'antinomie et cela à cause de nos propres procédés non-constructifs de formation d'ensembles. Le danger se trouve surtout dans l'enlacement des procédés, dont l'un définit des sous-ensembles particuliers par l'indication d'une propriété caractéristique, tandis que l'autre forme l'ensemble de tous les sous-ensembles.

Malgré cette divergence des points de vue mentionnés sur l'existence dans les mathématiques et malgré la fameuse parole pessimiste de POINCARÉ [1] à cet égard, je n'irai pas si loin que M. J. HADAMARD. Pour lui une entente réciproque au sujet de certains énoncés mathématiques, inaccessibles à une vérification, semble être aussi improbable que l'entente d'un homme à vue normale et d'un daltonien (ignorant son infirmité) qui, laissés sur une île déserte, discutent de l'influence des longueurs d'onde lumineuse sur les sensations de couleur dans l'œil [2]. Quand HADAMARD se prononçait dans ce sens la situation était vraiment critique et, au surplus, aggravée par la véhémence, avec laquelle les partis en lutte augmentaient encore leur distance. Mais ces dernières années on a pu, heureusement, constater un progrès important. Ce n'est pas, il est vrai, dans un changement de *points de vue* qu'il se manifeste, mais dans le sens d'une *compréhension* mutuelle, quoique trop unilatérale encore, des attitudes opposées et une plus juste appréciation de leurs causes. Ainsi des essais pleins de succès ont été faits de différents côtés visant à incorporer le système néointuitionniste dans les mathématiques classiques, à déterminer sa fonc-

---

[1] Voir « Dernières pensées » (Paris, 1926), p. 161.

[2] Préface à « Les fondements des mathématiques » de F. GONSETH (Paris, 1926).

tion et à apprécier son rôle dans cet ensemble [1], essais facilités par les travaux précieux de HEYTING [2].

Et je voudrais terminer par le souhait que des travaux de cette tendance continuent à paraître et contribuent à l'entente mutuelle dans ce domaine de la Logique mathématique.

SUR L'AXIOME DU CHOIX [3]

PAR

A. FRAENKEL (Jérusalem).

Les discussions sur l'axiome du choix durent depuis plus de 30 ans, son énoncé ayant été formulé pour la première fois sous forme d'un principe spécial par M. Beppo LEVI en 1902 [4] et utilisé en 1904 par M. Ernst ZERMELO (d'après une suggestion de M. Erh. SCHMIDT) comme base de démonstration du théorème sur le bon ordre. Les uns contestent en général la possibilité d'attribuer un sens à cet énoncé, comme je l'ai expliqué hier dans ma conférence sur la notion d'existence en mathématique. Un second groupe voit dans ce principe une proposition ayant un sens mais indémontrée et même indémontrable. Cette proposition ne peut servir comme moyen de démonstra-

---

1 Voir entre autres MENGER, *loc. cit.*; V. GLIVENKO dans *Acad. R. Belgique, Bull. Cl. Sc.* (5) **14**, 225-228, et **15**, 183-188 (1928/9); A. KOLMOGOROFF dans *Math. Ztschr.* **35**, 58-65 (1932); K. GÖDEL dans *Anzeiger Akad. Wiss. Wien*, Math.-Nat. Kl., 1932, 65-66, et *Ergebn. Math. Kolloq.* (MENGER) **4**, 9-10 et 39-40 (1933); puis les travaux de LUKASIEWICZ et d'autres traitant de la logique plurivalente.

2 *Sitzungsber. Preuss. Akad. Wiss.*, Phys.-Math. Kl., 1930, 42-71 et 158-169; voir aussi *Erkenntnis* **2**, 106-115 et 135-151 (1931) et *Verh. Intern. Math. Kongress Zürich* 1932, II, 344-345 (1933).

3 Conférences faites les 20 et 21 juin 1934 dans le cycle des Conférences internationales des Sciences mathématiques organisées par l'Université de Genève; série consacrée à la Logique mathématique.

J'exprime mes vifs remerciements à M. B. AMIRA (Jérusalem) qui a bien voulu se charger de la rédaction française de ce mémoire.

4 Pour les écrits parus jusqu'à 1928, voir la troisième édition de mon « Einleitung in die Mengenlehre » (Berlin, 1928).