

# BIBLIOGRAPHIE

Objektyp: **Group**

Zeitschrift: **L'Enseignement Mathématique**

Band (Jahr): **34 (1935)**

Heft 1: **L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE**

PDF erstellt am: **16.07.2024**

## **Nutzungsbedingungen**

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern.

Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden.

Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

## **Haftungsausschluss**

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

## BIBLIOGRAPHIE

---

Th. DE DONDER. — **Théorie invariante du Calcul des Variations.** Nouvelle édition. (Institut belge de Recherches radioscientifiques. Président-Fondateur: Th. De Donder. Volume IV). — Un vol. gr. in-8° de x-230-x pages. Prix: 35 francs. Gauthier-Villars. Paris, 1935.

Cette seconde édition prouve assez l'estime en laquelle le monde scientifique tient l'œuvre de M. De Donder. Cependant, comme nous l'avons déjà remarqué maintes fois, ici-même, le Calcul des Variations ne manque point d'animateurs illustres. Mais il y a, chez M. De Donder, une compréhension particulièrement profonde de la philosophie du sujet, compréhension d'autant plus remarquable qu'il ne cherche nullement à faire de la philosophie. Celle-ci éclate seule, sur des formules nombreuses et élégantes, formules qui se calculent, qui sont toujours des égalités. Que le monde inégalitaire ait grandement contribué aux progrès des mathématiques, voilà qui ne fait pas de doute, mais certains esprits ont poursuivi la perfection dans les domaines égalitaires et peut-être n'en pouvait-on trouver de plus beau et de plus général que celui du Calcul des variations.

Qu'est-ce qu'une théorie *invariante* de ce Calcul ? N'y a-t-il pas quelque paradoxe à parler d'invariance dans ce que l'on déclare variable ? Paradoxe ou non, il y a là ce que l'intelligence humaine peut faire de plus raisonnable vis-à-vis de l'infinie complexité des phénomènes. La Science doit d'abord rechercher, en ceux-ci, ce qui ne varie pas, d'où deux grandes catégories d'invariances mathématiques: l'invariance des intégrales des systèmes d'équations différentielles et l'invariance des intégrales multiples attachées à des champs d'intégration déformables, la déformation pouvant avoir lieu, très généralement, en vertu d'équations différentielles. En d'autres termes, *équations différentielles* et *invariants intégraux* sont les deux piliers fondamentaux du monde mathématique et physique.

Ces méthodes variationnelles sont essentiellement créatrices. On se propose, par exemple, d'étudier, pour une intégrale  $n$ -uple, toutes les variations possibles qui aboutissent à des invariances. Eh bien, l'on découvre rapidement que l'espace à  $n$  dimensions ne suffit pas. Il y a de l'invariance à découvrir dans l'espace à  $N$  dimensions,  $N$  étant plus grand que  $n$ . Un jeune esprit, non encore familiarisé avec l'hyperespace, pourrait découvrir celui-ci par de telles méthodes. C'est là ce que j'appelle un aboutissement philosophique; c'est même l'un des plus saisissants qui soient. La Connaissance s'étend par une irréprochable analyse.

Dès le début du volume, les formules sont empreintes du symbolisme qui réussit; les dérivées variationnelles sont prêtes à donner naissance aux

dérivées covariantes, ce qui fait que le Calcul différentiel absolu est rapidement englobé.

La permutabilité et la non-permutabilité sont associées par la notion de *reste de permutabilité*, ce reste étant simple et élégant. Ces débuts peuvent être facilement appuyés, pour une première étude, dans l'espace euclidien, et cependant on reconnaîtra vite qu'ils sont *amétriques*. Quel puissant intérêt que d'y réintroduire ensuite la métrique choisie, pour telle ou telle raison de commodité, en se rendant compte de l'arbitraire de cette introduction.

Le *déplacement* variationnel lui-même est une conception des plus simples, entraînant nombre d'invariances et d'identités aussi naturelles que celles accompagnant le déplacement euclidien d'un solide invariable.

Plus loin, à propos de la *forme intrinsèque* d'une intégrale  $n$ -uple, M. De Donder étudie un Calcul « au sens large » riche d'expressions, à construction jacobienne, qui sont invariantes ou égales entre elles, en lesquelles s'insèrent nombre d'expressions métriques ou d'invariants différentiels au sens de Lamé. D'immenses régions géométriques, souvent étudiées isolément, sont ainsi survolées et de très haut. Et, à propos de *variances*, on termine alors par la forme générale du Calcul absolu.

Soyons brefs pour la Seconde Partie et pour la Troisième. La seconde est essentiellement *canonique*. On ne répétera jamais assez qu'une fonction  $\Phi$ , à deux séries de variables  $x_i$  et  $y_i$ , donnant

$$\frac{\partial \Phi}{\partial x_i} dx_i + \frac{\partial \Phi}{\partial y_i} dy_i = 0$$

*lorsqu'elle reste constante*, est alors intégrale d'un système différentiel dont la forme la plus simple est

$$\frac{dx_i}{dt} = \frac{\partial \Phi}{\partial y_i}, \quad \frac{dy_i}{dt} = - \frac{\partial \Phi}{\partial x_i}.$$

Seulement on ne peut tout de même pas s'en tenir là. Ce raisonnement rudimentaire a le premier tort de ne mettre le système canonique en relation qu'avec une seule de ses intégrales. C'est en tentant de le reformer, dans des conditions plus générales, qu'on en trouve de curieuses extensions; les *solutions* en  $t$  sont alors *extrémales* aussi bien que *trajectoires* et c'est encore le point de vue variationnel qui domine. Il domine encore dans la recherche des identités fondamentales de la Gravifique, l'identité étant, en somme, une forme de l'invariance. Des principes analogues jouent en Mécanique ondulatoire où l'opérateur *hermitique* n'est jamais bien loin du symbolisme canonique.

Je m'arrête à regret. Ceux qui ont contribué, sans arrêt, à l'épuisement de la première édition de ce magnifique ouvrage, ne manqueront pas de s'inspirer de la seconde pour perfectionner encore les plus hautes recherches d'Analyse pure et de Physique théorique.

A signaler que le volume se termine par la *Liste des Publications de Th. De Donder*. Il n'y en a pas moins de 200, beaucoup concernant des Ouvrages ou des Mémoires très étendus. Cette liste seule pourrait attester la fécondité des méthodes créées ou perfectionnées par le savant auteur.

A. BUHL (Toulouse).

Stefan KACZMARZ und Hugo STEINHAUS. — **Theorie der Orthogonalreihen.**  
 (Monografie Matematyczne, tome VI). — Un volume gr. in-8° de vi-300  
 pages. Prix: 5 dollars U.S.A. Seminar. Matem. Uniwers. Warsz. Oczki,  
 Nr. 3. Warszawa-Lwow, 1935.

Les mathématiciens polonais poursuivent décidément une œuvre qui s'annonce gigantesque. Voici une théorie des séries orthogonales dont le modernisme n'efface nullement les attaches avec le passé, incontestablement glorieux, représenté par les recherches de Fourier et par celles de Sturm-Liouville. Ce qui caractérise l'esprit moderne est d'ailleurs facile à saisir. On ne construit plus rien sans dire dans quoi l'on construit, dans quel *espace*. Et, comme la notion *géométrique* d'espace n'est pas toujours saisissable, les espaces dans lesquels on opérera, en général, seront *abstraites*. Les applications les rendront *distanciés* et même *métriques*, encore que ces points de vue ne soient point essentiels pour le jeu des développements matriciels.

Dans les préliminaires de l'ouvrage il faut particulièrement citer les théorèmes de *résonance* consistant en des indéterminations intégrales qui en permettent d'autres encore plus étendues; il me semble que c'est ainsi que le *quasi-analytique* peut proliférer.

L'orthogonalité est tout de suite intégrale et matricielle. Aux considérations trigonométriques ou issues d'équations différentielles du second ordre s'en adjoignent d'autres, très différentes au point de vue fonctionnel et cependant très voisines au point de vue logique. Tel est le système orthogonal de Rademacher qui repose sur l'expression d'un  $t$  continu dans le système binaire, d'où des fonctions  $r_k(t)$  régies par l'alternance des chiffres 0 et 1, fonctions avec lesquelles on construit des intégrales en  $r_m(t)r_n(t)dt$ . Un système assez analogue a été construit par Haar sur le segment 0, 1 dans de certains assemblages formés sur une division de ce segment en  $2^n$  parties. Il y a déjà ici une opposition très heureuse entre une certaine orthogonalité arithmétique et l'orthogonalité de fonctions, généralement continues, considérée beaucoup plus anciennement. Le passage, comme il est à prévoir, ne va pas sans considérations ensemblistes.

Les séries orthogonales en  $L^2$  occupent un chapitre particulièrement important. Par  $L^2$  il faut entendre un espace où la métrique est, pour ainsi dire, une généralisation *intégrale* de la distance euclidienne construite à l'aide d'un radical à indice 2. Il y a là des considérations souvent rattachées aux travaux de Hilbert mais qui, comme les auteurs du livre le montrent, ont eu antérieurement plusieurs formes annonciatrices. Il faut citer J. P. Gram, en 1879, puis Erhard Schmidt, en 1905, avec des formules d'orthogonalisation qui présentaient, par récurrence, une certaine extensibilité. Hermite, aidé de Stieltjes, puis Cayley et Kronecker pressentaient la prodigieuse importance du sujet sans prévoir, à coup sûr, ses aboutissements modernes en Mécanique ondulatoire.

La nature même de  $L^2$  porte à y concevoir tout un ensembliste qui pourrait, sans doute, être analysé plus géométriquement, ensembliste où de simples conditions de fermeture semblent donner une foule de lemmes intégraux tels celui de Müntz. L'équation de Parseval et le lemme de Riesz-Fischer suivent aisément.

Voici un merveilleux chapitre de grands exemples. Equation et polynomes de Legendre. Polynomes de Tschebyscheff curieusement définis par un module maximum aussi petit que possible, dans un intervalle, et

orthogonalisations correspondantes avec le secours d'un radical très simple. Développements adéquats. Le système de Haar est construit avec des préoccupations de convergence uniforme.

Le système de Rademacher porte à considérer des intégrales

$$\int_0^1 r_j(t) r_k(t) \dots r_p(t) r_q(t) dt$$

généralement nulles mais égales à 1 pour  $j = k, l = m, \dots, p = q$ . Il peut prendre une autre forme considérée par Walsh. Et tout ceci peut aboutir aux intégrales multiples des théories maxwelliennes, aux considérations ergodiques, aux théories cinétiques générales de la matière qui se recréeraient ici, à nouveau, si des intuitions incomplètes mais géniales n'avaient donné ce que nous devons maintenant à une méthode.

Il n'est pas besoin d'aller plus loin pour prouver que nous sommes en présence d'un grand, très grand ouvrage. Terminons brièvement quant à sa seconde moitié.

Convergence et sommabilité sont associées. Dans une série à structure orthogonale, la convergence dépend-elle, en général, de l'ordre des termes ? La question nécessite d'abord certaines considérations à la Lebesgue.

Voici maintenant, au delà des  $L^2$ , le cas des  $L^p$ . C'est aussi le difficile problème des développements quelconques à rattacher, si possible, au type orthogonal. Transmuer tous les développements en un type unique donnerait une allure idéale, sans doute chimérique, à la Physique théorique mais on peut rechercher jusqu'où il est loisible d'aller dans ce sens. Les séries et systèmes *lacunaires* sont inféodés à des particularités limites des  $L^p$ . Elles trahissent plutôt des structures relatives à ces  $L^p$  que des conditions qui y seraient introduites après coup.

Une autre généralisation, à peine sortie des limbes, est celle des systèmes biorthogonaux. Elle se rattache à la notion du *relativement* orthogonal.

Riche bibliographie où l'on s'étonne cependant de ne pas trouver certains noms, tels celui de M. Maurice Fréchet. Néanmoins production de premier ordre.

A. BUHL (Toulouse).

J.-L. WALSH. — **Interpolation and Approximation by Rational Functions in the Complex Domain.** (American Mathematical Society Colloquium Publications. Volume XX). — Un vol. gr. in-8° de x-382 pages. Prix: \$ 5. Published by the American Mathematical Society. New-York, 1935.

Ce volume n'est pas sans analogie avec le précédent qui, par endroits, s'appuyait sur les travaux de J. L. Walsh. Il s'agit de la représentation par séries de polynomes, ce qui équivaut, sous des conditions très larges, à la représentation par séries de fonctions continues donc par séries de Fourier et analogues. Il y a d'ailleurs des polynomes trigonométriques. Certains noms dominent tous ces sujets tels celui de Tchebycheff, selon l'orthographe américaine, ou de Tschebyscheff selon l'orthographe polonaise. Ces analogies sont des plus remarquables et ont quelque chose de relativement rassurant. Qui ne s'est effrayé devant la floraison des théories modernes à apparences grandioses. Quel cerveau les analysera toutes ?

Eh bien, une expérience déjà ancienne m'a appris à ne point me frapper. Il suffit de se proposer d'étudier à fond *une seule* de ces théories. On est ensuite capable de comprendre et d'analyser rapidement les autres. On peut ainsi trouver, dans le présent ouvrage, un chapitre sur les développements orthogonaux situés même, très explicitement, dans l'espace  $L^2$ .

Ce qui distingue nettement l'œuvre de J. L. Walsh, c'est l'attachement au domaine complexe. Elle embrasse nombre de méthodes de prolongement analytique, méthodes examinées non pas quant à une structure souvent étrange mais quant à l'approximation fournie. Et ce qui est le mieux, au point de vue approximatif, coïncide souvent avec la construction de la plus grande élégance structurale.

Les représentations approchées selon Lindelöf ne sont pas sans profondes considérations concernant la représentation conforme. La formule intégrale de Cauchy, remaniée à son tour, conduit aux approximations par intégrales doubles puis par *lemniscates*, courbes d'égal module pour polynômes avec lesquelles on limite des domaines où jouent certaines intégrales déjà étudiées par Jacobi. Il y a là des points de départ pour conceptions interpolatrices de plus en plus générales.

A la fonction de Green peuvent également correspondre des domaines à bornes similaires des lemniscates précédentes. On parvient, par exemple, à l'approximation pour courbes de Jordan. Tout ceci suppose évidemment des convergences d'opérations successives pour lesquelles on retrouve, assez aisément, le fil directeur de la convergence uniforme.

Tchebycheff intervient avec la recherche de la meilleure approximation polynomiale. Là encore cette approximation peut être mesurée par une intégrale de ligne, par une intégrale de surface, parfois avec intervention d'une représentation conforme. Le problème peut être repris et poursuivi sans considérations d'analyticité. C'est l'occasion d'étudier le secours provenant des développements à constitution orthogonale.

L'interpolation par fonctions polynomiales repose sur des différences entre  $f(z)$  et  $P^n(z)$  exprimables par des intégrales à la Cauchy.

Voici maintenant l'interpolation par fonctions rationnelles. A signaler d'abord une généralisation de la formule de Lagrange. Il y a ici des classes très importantes d'expressions interpolatrices qui agissent à la limite et qui, avant le passage à la limite, fournissent des configurations, parfois très différentes, entre lesquelles cependant le choix est arbitraire.

Plus loin, ce sont les séries de fractions rationnelles ou les produits convergents qui, arrêtés ou transformés en un nombre fini de termes, sont encore ingénieusement comparables à leur forme limite complète. Tout est, en effet, entre cette forme limite et les formes non limites qui la préparent. On aurait pu croire qu'entre les deux formes, il n'y avait rien de simple à formuler. Erreur et c'est là qu'intervient l'originalité, souvent féconde, de J. L. Walsh.

D'ultimes tentatives sont faites dans le non analytique. Le Calcul des variations y fait apparaître certaines possibilités généralisant ce qui a été demandé antérieurement à la représentation conforme.

A première vue, on pourrait critiquer le livre comme semblant fait de l'assemblage d'une foule de problèmes particuliers. Un examen plus approfondi fait admirer l'esprit synthétique qui s'étend sur le tout.

J. SER. — **La réduction des Séries alternées divergentes et ses applications.**  
— Un vol. gr. in-8° de vi-44 pages. Prix : 12 francs. Gauthier-Villars.  
Paris, 1935.

Je ne sais si l'esprit d'analogie peut exagérer, mais voici encore un opuscule qui me paraît pouvoir être rapproché de l'œuvre de J. L. Walsh qui vient d'être analysée. Dans les deux cas on s'occupe d'approximations par constructions rationnelles. Les « facultés » utilisées ici sont des fractions rationnelles. Elles permettent des constructions de séries qui relèvent du Calcul des différences plutôt que du Calcul différentiel; ces constructions se font à des fonctions périodiques près, la fonction  $\Gamma$  y jouant un rôle fondamental. Cependant on peut revenir ainsi aux formules de sommabilité de M. Borel, lesquelles sont de structure taylorienne. En outre, ces études comportent des formules fonctionnelles d'inversion entre séries, formules moins banales que les formules intégrales d'inversion. Toujours sans avoir vérifié tous les calculs de l'auteur, je puis dire que leur aspect élégant répond déjà d'eux dans une large mesure; leur seule description, en ces quelques mots, rappelle un esprit digne d'un Laguerre.

Ce nouveau fascicule doit être considéré comme la suite de celui publié, en 1933, sur *Les calculs formels des Séries de factorielles*, fascicule analysé dans *L'Enseignement mathématique* (t. 32, 1933, p. 275).

M. Joseph Ser travaille, en solitaire, à des questions que les mathématiciens actuels semblent beaucoup négliger; il le fait, du moins, avec un indéniable talent.

A. BUHL (Toulouse).

J. NIELSEN. — **Vorlesungen über Elementare Mechanik**, übersetzt und bearbeitet von W. Fenchel. (Die Grundlehren der mathematischen Wissenschaften in Einzeldarstellungen. Band XLIV). — Un vol. gr. in-8° de x-500 pages et 164 figures. Prix: RM. 38; relié RM. 39,60. Julius Springer. Berlin, 1935.

Le seul titre de cet ouvrage m'a causé d'abord une certaine stupéfaction. Comment, alors qu'il y a tant de mécaniques nouvelles, peut-on encore trouver un auteur — et non des moindres — pour s'attarder à récrire sur la Mécanique élémentaire ?

Cette stupéfaction n'a point duré. Elle a même cessé dès l'examen du premier chapitre: Vecteurs et Matrices. Il s'agit de Mécanique élémentaire refaite avec les conceptions modernes. A voir les traités de Mécanique quantique commencer par la théorie des matrices, que de gens se sont imaginé qu'il y avait là un début propre aux constructions corpusculaires et ondulatoires. Non, la matrice est l'instrument naturel qui agit sur le vecteur et le transforme. Associée aux déterminants symboliques de nature différentielle, elle permet d'atteindre tout le symbolisme tensoriel d'ailleurs excellemment amorcé aussi par M. Nielsen qui l'applique finalement à la géométrie des masses, à la dynamique du solide, bref à une foule de questions qui placent très heureusement, dans la mécanique ordinaire, une analyse qui aurait dû toujours lui être adéquate.

L'esprit du livre est essentiellement intuitif. Toutes les formules sont symétriques, ce à quoi matrices et déterminants contribuent grandement; les figures sont nombreuses, ingénieuses, à effets s'imposant à la vue. C'est du style à la Paul Appell; il y a aussi une sorte de finesse descriptive qui

rappelle la *Theorie der Bewegung und der Kräfte* publiée, en 1879, par W. Schell, avec les mots « Geometrica geometrice » en frontispice. Il semble bien que ce soit cet esprit qui, ici, se trouve cultivé à nouveau avec le secours des idées actuelles.

La Statique graphique est naturellement très riche au point de vue géométrique. L'emploi des notions nouvelles a permis d'adjoindre les considérations primordiales des théories élastiques à ce qui concerne le solide idéalement indéformable. Adjonctions analogues à propos de la notion de travail.

La théorie du potentiel est une véritable symphonie de vecteurs, de matrices, d'opérateurs différentiels et d'intégrales vectorielles.

Il en est de même pour les théorèmes généraux sur le mouvement des systèmes; ces théorèmes aboutissent rapidement aux équations de Lagrange appliquées à de nombreux exemples. L'élémentaire de M. Nielsen n'est pas le rudimentaire. Et c'est après cela qu'il s'attaque, très explicitement, aux tenseurs.

Les percussions, l'équilibre et même le mouvement des fils terminent un volume enrichi encore par de remarquables exercices. Les élèves qu'il formera n'auront aucune peine à comprendre la Gravifique et la Mécanique ondulatoire.

A. BUHL (Toulouse).

Gino FANO. — **Geometria non Euclidea.** Introduzione geometrica alla Theoria della Relatività. (Consiglio nazionale delle Ricerche). — Un vol. gr. in-8° de iv-252 pages et 68 figures. Prix: L. 55.—. Nicola Zanichelli. Bologne, 1925.

Charmant ouvrage, facile, suggestif, jouant admirablement son rôle introducteur et ressemblant beaucoup à *La Géométrie non-euclidienne* de P. Barbarin (Collection *Scientia*, 1928, 3<sup>e</sup> édition), citée d'ailleurs en tête de la bibliographie. Mêmes soucis historiques. Descriptions des premières tentatives de Wallis, Saccheri, Lambert, Legendre, Gauss, Schweikart, Taurinus, Lobatchewsky, des deux Bolyai.

La première forme de la Géométrie non-euclidienne est, pour ainsi dire, intrinsèque. Elle tente de généraliser plutôt que d'interpréter. Elle peut même abandonner d'autres postulats que celui d'Euclide, par exemple celui d'Archimède qui veut que la répétition d'un segment surpasse tout segment donné.

Les méthodes interprétatives, à caractère géodésique sur des surfaces courbes ou en des espaces incurvés, ne viennent qu'ensuite. Ce sont elles qui caractérisent la manière de Riemann et qui conduisent le plus naturellement à la Gravifique.

Sur une simple surface, où nous avons

$$ds^2 = Edu^2 + 2F dudv + Gdv^2, \quad H^2 = EG - F^2,$$

on a, pour la courbure totale,

$$K = -\frac{1}{2H} \left\{ \frac{\partial}{\partial u} \frac{1}{H} \left( \frac{\partial G}{\partial u} - \frac{F}{E} \frac{\partial E}{\partial v} \right) + \frac{\partial}{\partial v} \frac{1}{H} \left( \frac{\partial E}{\partial v} - 2 \frac{\partial F}{\partial u} + \frac{F}{E} \frac{\partial E}{\partial u} \right) \right\}.$$



Je reproduis cette expression qui, dans l'ouvrage italien, a été défigurée par une maladresse typographique. J'y joins une observation qui ne s'adresse nullement à M. Fano mais à l'expression même laquelle glisse ainsi de livre en livre, sans doute parce qu'elle passe pour la plus concise mais avec l'inconvénient de ne pas avoir la symétrie du  $ds^2$ . Celui-ci ne change pas si l'on permute E et G ainsi que  $u$  et  $v$ . Il doit en être de même pour K qui est alors donné par

$$4HK = \frac{\partial}{\partial u} \frac{1}{H} \left( \frac{G}{EF} \frac{\partial}{\partial v} \frac{EF^2}{G} - 2 \frac{\partial G}{\partial u} \right) + \frac{\partial}{\partial v} \frac{1}{H} \left( \frac{E}{GF} \frac{\partial}{\partial u} \frac{GF^2}{E} - 2 \frac{\partial E}{\partial v} \right).$$

Et, comme il n'y a besoin de retenir que la première moitié du second membre, il semble bien que ce soit ici qu'on ait le véritable avantage de la simplicité.

Quelle que soit la forme de K, on arrive facilement à la formule intégrale de Gauss relative à la somme des angles d'un triangle géodésique et aux surfaces pseudosphériques de révolution (jolies figures) auxquelles on aurait pu joindre facilement des hélicoïdes à courbure totale constante.

Riemann a été développé par Christoffel dont le symbolisme est devenu tout à fait courant grâce aux *Lezioni* de Bianchi. Très près de nous, nous avons aussi Ricci et Levi-Civita. Il faut savoir reconnaître tout ce que l'Ecole italienne a fait pour la Géométrie ! On doit aussi jeter un coup d'œil sur l'œuvre gigantesque de Sophus Lie, sur les espaces de groupes, analogues aux espaces riemanniens, si bien étudiés par M. Elie Cartan.

Enfin, c'est la réalité métrique et projective d'où Albert Einstein a extrait plus particulièrement ses  $ds^2$  à signification physique puisqu'ils permettent de *mesurer*. L'univers d'Einstein est, par excellence, un univers *mesurable*, construit à partir de l'action, de la comparaison possibles. Toutes ces choses sont reprises très clairement par M. Gino Fano; on reconnaît bien, en son livre, une nouvelle et puissante manière de connaître.

A. BUHL (Toulouse).

Maurice D'OCAGNE. — **Hommes et Choses de Science.** Propos familiers.

Troisième série. — Un volume petit in-8° de iv-278 pages. Prix: 15 francs.

Vuibert, Paris, 1936.

Voici une « Troisième série » qui dit suffisamment le succès des deux précédentes, publiées l'une en 1930 et l'autre en 1932 (voir *L'Enseignement mathématique*, t. 31, 1932, p. 316). Nous y retrouvons beaucoup de noms illustres déjà cités en les premiers volumes, mais toujours avec quelque anecdote nouvelle et intéressante.

Nous commençons maintenant avec « Le mouvement mathématique français contemporain ». L'art y est magnifié car, on le sait, M. d'Ocagne peut créer et apprécier en artiste. Géomètre, il sait cependant s'enthousiasmer pour d'illustres collègues, tels Hermite et Poincaré, qui n'ont guère géométrisé au sens initial du mot.

Le rôle intellectuel des femmes l'intéresse à une époque où l'élément féminin monte à l'assaut des Facultés. L'idée générale est que la femme cesse rapidement, avec l'âge, de se développer intellectuellement. Mais, à cet égard, que d'hommes sont femmes !

Suit une grande digression astronomique sur le monde solaire. Coniques. Lois de Képler. Newton et Laplace. Clairaut, Newton français. Avec quel plaisir j'ai lu ce qui concerne Le Verrier. On sait que ce grand génie fut attaqué *après* la découverte de Neptune; on lui reprocha de fantastiques erreurs de calcul qui faisaient que cette découverte n'était plus due qu'au hasard ! Petites planètes. Pluton. Cosmogonie surtout d'après Emile Belot.

Chimie moderne. Lavoisier. Berthollet, justement protégé par Napoléon. Gay-Lussac.

Peiresc, un Pic de la Mirandole français. Humaniste, musicien, physicien, naturaliste, astronome découvrant notamment le quatrième satellite de Jupiter.

Riquet. Nécessité d'étendre son œuvre par l'exécution du Canal des Deux-Mers destiné à la grande navigation.

Vauban. Autodidacte. Travaux maritimes valant les travaux militaires.

François Blondel. Géomètre, diplomate, balisticien, architecte.

Denys Papin. Réalisateur laissant à d'autres les constructions philosophiques.

Réaumur. Physicien moins célébré comme biologiste et cependant précurseur de Pasteur.

Le Duc de Brancas-Lauraguais. Chimiste peu connu. Fin d'existence difficile.

Napoléon et les savants. Relations avec Mascheroni. Problème de Napoléon : centre d'un cercle donné à déterminer par le compas seul. Relations avec Laplace, Lagrange, Fourier, Monge, Carnot, Lacépède.

Prony, grand ingénieur du grand Empereur. Professeur de Mécanique à l'Ecole Polytechnique.

Nicolas-Jacques Conté. C'est le Conté des crayons Conté. Etonnant inventeur auquel on pouvait commander des découvertes. Création de l'aérostation militaire. Technicien hors de pair durant l'expédition d'Egypte. Collaborateur de premier ordre pour Bonaparte.

Charles Dupin. Le merveilleux géomètre des cyclides.

Thomas de Colmar. Inventeur de l'Arithmomètre et, de ce fait, digne continuateur de Pascal.

Dernières pages de Pierre Termier. Enthousiasmes lyriques d'un savant.

Pierre Duhem. Savant, philosophe, humaniste, historien. Je suis de ceux qui regrettent ses oppositions avec Henri Poincaré tout comme sa façon de trouver quelques demi-excuses aux inquisiteurs qui condamnèrent Galilée. Mais incontestablement grand savant sachant d'ailleurs, comme Pierre Termier, s'exprimer avec magnificence.

Le Duc de Broglie et la Physique des rayonnements. Charge de l'électron. Radioactivité. Analyse spectrale des rayons X.

Le Prince Louis-Victor de Broglie et la Mécanique ondulatoire. Frère du précédent, de dix-huit ans plus jeune. A combien de titres déjà célèbre ! Le plus beau est, sans doute, l'accord établi par lui entre la théorie ondulatoire et la théorie photonique d'Albert Einstein.

Georges Claude et l'énergie thermique des mers. Réalisateur de fictions à la Jules Verne. Qui n'a su, par la presse quotidienne, ses tentatives et sa ténacité.

L'exploration de la stratosphère. Gloire au professeur belge Piccard. Encore des tentatives bien connues non exemptes de grands dangers.

Le volume se termine par le Discours de l'auteur à son Jubilé profes-

soral. *L'Enseignement mathématique* (t. 32, 1933, p. 87) a rendu compte de cette belle cérémonie.

Remercions M. Maurice d'Ocagne d'avoir rassemblé, une fois de plus, tant de renseignements et d'enseignements. A. BUHL (Toulouse).

H. SEIFERT u. W. THRELFALL. — **Lehrbuch der Topologie.** — Un vol. in-8° de VII-351 p. avec 132 figures; relié, RM. 20; B. G. Teubner, Leipzig, 1934.

Livre excellent dont la lecture est toujours attrayante et qui rendra de grands services à quiconque veut étudier la Topologie. Evidemment un volume de 350 pages ne peut englober l'ensemble de la Topologie moderne. Aussi les auteurs laissent-ils complètement de côté la théorie des espaces topologiques en général et se bornent-ils à l'étude de la Topologie des complexes. J'indique brièvement les principales questions traitées dans les différents chapitres.

1. Dans le premier chapitre les notions et les problèmes de la Topologie sont exposés d'une façon intuitive à l'aide de nombreux exemples.

2. Après avoir donné les notions indispensables de la Topologie générale, les auteurs développent les notions de simplexe, de complexe simplicial et de subdivision normale d'un complexe simplicial.

3. Ce chapitre contient la théorie des groupes d'homologie d'un complexe simplicial, étude limitée au cas où les coefficients dans les chaînes de simplexes considérées sont les nombres entiers ou les nombres entiers modulo 2. On trouvera en particulier la détermination des nombres de Betti et des coefficients de torsion à l'aide des matrices d'incidence.

4. Les notions de simplexe singulier et de chaîne singulière permettent de définir les groupes d'homologie topologique dont l'invariance topologique est manifeste. Le théorème fondamental sur l'approximation simpliciale des chaînes singulières montre que les groupes d'homologie topologiques sont identiques aux groupes d'homologie combinatoires dont l'invariance topologique est ainsi établie.

5. Dans ce chapitre on considère des propriétés topologiques locales, c'est-à-dire des propriétés qui ne dépendent que d'un voisinage arbitrairement petit d'un point donné. Ainsi on peut définir les groupes d'homologie en un point. A l'aide de cette notion on démontre facilement l'invariance topologique des notions suivantes: Dimension, bord, pseudovariété.

6. Le problème fondamental de l'homéomorphie des complexes finis à deux dimensions est résolu ici avec beaucoup d'élégance et de concision. Les surfaces fermées sans bord ou avec bord sont réduites à des formes canoniques. Les autres problèmes de la Topologie des surfaces ne sont pas abordés.

7. Théorie du groupe fondamental de Poincaré d'un complexe simplicial; détermination de ce groupe à l'aide de générateurs et de relations. Le groupe d'homologie de dimension 1 est le groupe quotient du groupe fondamental par son groupe des commutateurs.

8. Etude des recouvrements sans ramifications d'un complexe donné. Correspondance entre les sous-groupes du groupe fondamental et les complexes de recouvrement d'un complexe donné. Groupe de monodromie et groupe des autoprojections (Deckbewegungsgruppe) d'un recouvrement.

9. Les auteurs ont consacré un chapitre intéressant aux variétés closes à trois dimensions. Une telle variété peut être définie comme un complexe

fini homogène. Je signale l'étude de la représentation d'une variété par un polyèdre dont on identifie deux à deux les faces, ainsi que la définition et quelques propriétés des diagrammes de Heegaard. On trouvera aussi de nombreux exemples de variétés à trois dimensions; mais le problème de la classification de ces variétés est toujours loin d'être résolu.

10. Variétés combinatoires à  $n$  dimensions. Une telle variété est définie de la façon suivante: c'est un complexe à  $n$  dimensions dont les groupes d'homologie en chaque point sont les mêmes que ceux d'une sphère à  $n - 1$  dimensions. Les principales questions traitées sont le théorème de dualité de Poincaré, les nombres d'intersection et les coefficients d'enlacement. Le théorème de dualité d'Alexander n'a pu être indiqué que dans une des courtes notes à la fin du volume.

11. Etude sommaire des transformations continues de complexes: Degré topologique d'une transformation continue d'une pseudovariété dans une autre pseudovariété; théorème sur les points fixes d'une transformation continue d'un complexe en lui-même.

12. Le dernier chapitre contient les notions et les théorèmes de la théorie des groupes qui jouent un rôle important en Topologie combinatoire.

Dans un grand nombre de notes à la fin du volume, le lecteur trouvera d'intéressants compléments et des aperçus sur des recherches récentes en Topologie. De nombreux exercices sont intercalés dans le texte des différents chapitres. Je signale enfin l'index bibliographique et l'index alphabétique des termes employés. Charles EHRESMANN (Paris).

J. F. KOKSMA. — **Diophantische Approximationen** (Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete, herausgegeben von der Schriftleitung des « Zentralblatt für Mathematik », Vierter Band, Heft 4). — Un vol. in-8° de vi-157 pages; broché, RM. 18,40; Julius Springer, Berlin, 1936.

Ce nouveau fascicule des « Ergebnisse der Mathematik » nous renseigne sur l'état actuel des méthodes et des résultats de la Théorie des approximations linéaires. Au centre des recherches effectuées dans ce domaine se trouvent les méthodes fondamentales que l'on doit à Lejeune-Dirichlet, Hermite et Minkowski.

L'auteur passe en revue les travaux consacrés à l'approximation, par des nombres rationnels, des irrationnelles réelles, algébriques ou transcendentes, ainsi que l'approximation dans le domaine complexe et l'approximation dans le voisinage de zéro de formes linéaires à plusieurs variables.

Accompagné d'une riche documentation bibliographique et d'une table analytique des matières, ce volume sera consulté avec profit par ceux qui désirent se mettre au courant des progrès accomplis dans la Théorie des approximations linéaires. H. FEHR.

E. MADELUNG. — **Die mathematischen Hilfsmittel des Physikers**. Unter Mitarbeit von K. BOEHLE u. S. FLÜGGE. Dritte, vermehrte u. verbesserte Auflage. (Die Grundlehren der math. Wissenschaften in Einzeldarst., Band IV). — Un vol. in-8° de 381 p. avec 25 fig.; broché, RM. 27; relié, RM. 28,80; Julius Springer, Berlin, 1936.

Cet Ouvrage contient les connaissances mathématiques indispensables à tous ceux qui veulent s'initier aux recherches récentes de la Physique

théorique. Ce n'est pas un traité didactique, mais un recueil dans lequel l'auteur a groupé les propriétés fondamentales et les formules dont le physicien peut avoir besoin. La première partie est consacrée aux mathématiques; elle comprend les chapitres suivants: Calcul différentiel et intégral. — Séries et développement en séries. — Des fonctions. — Algèbre, équations linéaires, déterminants. — Transformations géométriques. — Analyse vectorielle. — Des systèmes de coordonnées. — Théorie des groupes. — Equations différentielles. — Equations intégrales. — Calcul des variations. — Calcul des probabilités.

La seconde partie débute par la mécanique. Puis viennent: l'électrodynamique et l'optique, la théorie de la relativité, la théorie des quanta, la thermodynamique, les méthodes statistiques. — Appendice: notes et formules diverses. — Bibliographie. — Table analytique des matières.

La première édition de ce recueil remonte à 1922. Depuis cette époque le bagage mathématique indispensable au physicien s'est considérablement augmenté. L'auteur en a largement tenu compte dans cette troisième édition revue et augmentée.

H. FEHR.

**Factor Table** giving the complete decomposition of all numbers less than 100.000, Prepared independently by J. PETERS, A. LODGE and E. J. TERNOUTH, E. GIFFORD and collected by the British Association Committee for the Calculation of Mathematical Tables (Vol. V de la collection des *Mathematical Tables*). — Un vol. in-4° de xv-291 pages; relié, 20 sh.; Office of the British Association, Burlington House, W. 1, Londres, 1935.

On sait que les premières recherches sur les nombres premiers remontent à Eratosthène et Euclide. Puis viennent, pour ne citer que quelques grands noms, Fermat, Pascal et Mersenne, au XVII<sup>e</sup> siècle; Euler et Wilson, au XVIII<sup>e</sup> siècle, suivis de Legendre, Lagrange, Lejeune-Dirichlet, Tchebicheff, Gauss, Riemann, E. de Jonquières, Sylvester, Lucas, etc.

Avec le XIX<sup>e</sup> siècle commence la publication de tables de nombres premiers et de facteurs premiers des nombres (L. Chernac, 1811; J. Ch. Burckhart, 1814-17); Z. Dase et H. Rosenberg, 1865; James Glaisher, 1879-83, accompagné d'une notice historique; D. N. Lehmer, 1909; E. Lebon, 1920; Inghirami et d'autres.

A la suite des erreurs relevées dans plusieurs de ces tables et aussi en raison de la disposition peu pratique de quelques-unes d'entre elles, la publication d'un nouveau recueil était désiré par les spécialistes. Le présent volume est de nature à leur donner entière satisfaction. D'une consultation très facile, il fournit la décomposition complète de tous les nombres inférieurs à 100.000, ainsi que les valeurs inverses, avec 11 décimales, des nombres premiers inférieurs à 10.000.

Calculée séparément par les auteurs mentionnés dans le titre, vérifiée avec soin, cette Table a été publiée par le Comité des Tables numériques de la « British Association for the Advancement of Science » sous la direction de MM. E. H. Neville et L. J. Comrie. Ajoutons que grâce à la générosité du Lieut.-Col. A. J. C. Cunningham l'Ouvrage peut être vendu au prix relativement modique de 20 sh.

Le Volume VI des « Mathematical Tables » sera consacré aux fonctions de Bessel.

H. FEHR.