

I. — Une application du théorème fondamental de Herbrand à l'axiomatique.

Objekttyp: **Chapter**

Zeitschrift: **L'Enseignement Mathématique**

Band (Jahr): **34 (1935)**

Heft 1: **L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE**

PDF erstellt am: **15.08.2024**

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern.

Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden.

Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

Haftungsausschluss

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

QUELQUES POINTS ESSENTIELS DE LA MÉTAMATHÉMATIQUE

PAR

P. BERNAYS (Zurich).

I. — Une application du théorème fondamental de Herbrand à l'axiomatique.

L'axiomatique usuelle s'appuie sur l'arithmétique qu'elle envisage comme appartenant, pour ainsi dire, à la logique.

Les démonstrations de non-contradiction que l'on a données pour les systèmes axiomatiques de la géométrie et de la physique consistent à montrer qu'une contradiction dans l'un de ces systèmes devrait entraîner une contradiction dans l'arithmétique.

Cette réduction à l'arithmétique ayant été déjà faite, M. HILBERT concentrait, dans la théorie de la démonstration, son effort à démontrer, de son point de vue fini, la non-contradiction de l'arithmétique.

Mais puisque pour le moment ce problème n'est pas encore résolu, la question se pose s'il est nécessaire pour l'axiomatique, en particulier celle de la géométrie élémentaire, de démontrer la non-contradiction de l'arithmétique, soit dans le sens de l'analyse infinitésimale ou du moins dans le sens de la théorie axiomatique des nombres.

La question se pose d'autant plus que le modèle arithmétique de la géométrie euclidienne peut être donné dans le cadre de la théorie des nombres algébriques, — du moins quand on fait abstraction du deuxième axiome de continuité qui n'est pas employé

dans la géométrie élémentaire. On peut même se restreindre à ces nombres qu'on obtient en adjoignant aux quatre opérations élémentaires du calcul celle de prendre la racine carrée d'un nombre positif.

Cette partie de l'arithmétique peut être traitée directement selon les exigences du point de vue fini.

En constatant ce fait, on est tenté de croire que le problème de la non-contradiction de la géométrie élémentaire axiomatique est déjà résolu, puisque le modèle arithmétique appartient au domaine de la mathématique intuitive.

Mais il faut considérer que, de l'interprétation intuitive des axiomes, il ne dérive pas sans autre une interprétation pareille des démonstrations. En effet, les démonstrations de la géométrie axiomatique s'appuient sur la supposition que les points, de même que les droites et les plans, forment des ensembles complets fermés. En vertu de cette supposition, les affirmations concernant l'existence d'un point (d'une droite, d'un plan) d'une certaine propriété ont un sens immédiat, et le *tertium non datur* est généralement valable; on peut donc appliquer les raisonnements de la logique classique formalisés par le calcul logique ordinaire.

Cette supposition de la totalité, que la géométrie axiomatique fait pour les domaines d'individus, n'est pas contenue dans l'interprétation arithmétique intuitive. Aussi cette interprétation ne nous permet pas de vérifier toutes les démonstrations de la géométrie axiomatique, et nous ne pouvons donc pas au moyen d'elle nous assurer immédiatement que la géométrie axiomatique est non-contradictoire.

Cependant on peut surmonter cette difficulté à l'aide d'un théorème logique de J. HERBRAND.

Pour expliquer cette méthode, nous considérons, au lieu des axiomes de la géométrie, un système d'axiomes plus simple se rapportant à un seul domaine d'individus et un seul prédicat Φ à deux sujets (fonction logique binaire). Les axiomes sont les suivants:

- 1) $\Phi(x, x)$ n'est valable pour aucun x .
- 2) Si $\Phi(x, y)$ et $\Phi(y, z)$, alors $\Phi(x, z)$.
- 3) Pour chaque x il existe au moins un y tel que $\Phi(x, y)$.

On voit d'abord que ces axiomes ne peuvent être remplis pour un domaine fini d'individus. D'autre part, on obtient une interprétation des axiomes pour le domaine des nombres entiers en prenant pour $\Phi(x, y)$ le prédicat $x < y$. C'est une interprétation intuitive; en particulier l'affirmation existentielle peut être précisée en la remplaçant par l'inégalité $x < x + 1$, valable pour tous les x .

De cette interprétation ne découle pas immédiatement l'impossibilité d'une contradiction déduite des trois axiomes par les raisonnements de la logique classique. Nous allons montrer comment cette impossibilité, du moins pour la logique du premier ordre, résulte du dit théorème de Herbrand¹.

Pour cela il faut introduire les symboles logiques:

&	« et »,	signe de la conjonction.
—	« non »,	» » » négation.
→	« si — alors »	» » l'implication.
∨	« ou bien »,	» » la disjonction.
(x)	« pour chaque x »,	» » » généralité.
(Ex)	« pour quelque x »,	» » l'existence.

Au moyen de ces signes on représente les trois axiomes considérés par les formules

- 1) $(x) \overline{\Phi(x, x)}$.
- 2) $(x) (y) (z) (\Phi(x, y) \& \Phi(y, z) \longrightarrow \Phi(x, z))$.
- 3) $(x) (Ey) \Phi(x, y)$.

En joignant les trois formules par la conjonction, nous obtenons une seule formule $\mathfrak{A}(\Phi)$ représentant le système des axiomes 1), 2), 3).

Si ce système d'axiomes entraînait une contradiction par les raisonnements de la logique classique s'exprimant dans le calcul logique ordinaire, alors la formule $\overline{\mathfrak{A}(\Phi)}$ (négation de $\mathfrak{A}(\Phi)$) serait déductible par le calcul logique, sans l'emploi d'un axiome; de la même manière on pourrait déduire la formule $\overline{\mathfrak{A}(P)}$ avec une variable P à deux arguments représentant un prédicat quelconque à deux sujets.

¹ Dans ce cas simple, qui nous sert ici seulement d'exemple, on pourrait aboutir au même résultat par une méthode plus directe.

Or $\mathfrak{A}(P)$ étant la formule

$$(x) \overline{P(x, x)} \quad \& \quad (x)(y)(z)(P(x, y) \quad \& \quad P(y, z) \longrightarrow P(x, z)) \\ \& \quad (x)(Ey)P(x, y)$$

sa négation se transforme, d'après les règles du calcul logique, en

$$(Ex)P(x, x) \quad \vee \quad (Ex)(Ey)(Ez)(P(x, y) \quad \& \quad P(y, z) \quad \& \quad \overline{P(x, z)}) \\ \vee \quad (Ex)(y)\overline{P(x, y)}$$

et encore en

$$(Ex)(Ey)(Ez)(u)\{P(x, x) \quad \vee \quad (P(x, y) \quad \& \quad P(y, z) \\ \& \quad \overline{P(x, z)}) \quad \vee \quad \overline{P(x, u)}\}.$$

Cette formule, que nous dénoterons d'une manière abrégée par

$$(Ex)(Ey)(Ez)(u) \quad \mathfrak{B}(x, y, z, u),$$

devrait donc être déductible par le calcul logique ordinaire, si on pouvait déduire une contradiction des axiomes 1), 2), 3).

A cette conséquence s'adjoint l'application du théorème de Herbrand. Ce théorème nous apprend que d'une déduction de la formule

$$(Ex)(Ey)(Ez)(u) \quad \mathfrak{B}(x, y, z, u)$$

on obtiendrait (par un certain procédé qu'il n'importe d'indiquer ici) une disjonction

$$\mathfrak{B}(a_1, b_1, c_1, d_1) \quad \vee \quad \mathfrak{B}(a_2, b_2, c_2, d_2) \quad \vee \quad \dots \quad \vee \quad \mathfrak{B}(a_r, b_r, c_r, d_r)$$

ayant les propriétés suivantes:

1. Les arguments dénotés par

$$a_1, b_1, c_1, d_1, \dots, a_r, b_r, c_r, d_r$$

sont des variables, entre lesquelles des égalités peuvent avoir lieu; cependant d_i doit être différent de a_i, b_i, c_i et aussi de a_h, b_h, c_h, d_h pour $h < i$.

2. Appelons les diverses expressions $P(a, b)$, desquelles la formule est composée (au moyen de la conjonction, de la dis-

jonction et de la négation), les « composants » de la formule; attribuons à chaque composant d'une manière quelconque une des valeurs ν (« vrai »), f (« faux »); de plus donnons

à $\bar{\nu}$ la valeur f ,
à \bar{f} la valeur ν ,
à $\nu \& f, f \& \nu, f \& f$ la valeur f ,
à $\nu \& \nu$ la valeur ν ,
à $\nu \vee \nu, \nu \vee f, f \vee \nu$ la valeur ν ,
à $f \vee f$ la valeur f .

Nous obtenons alors la valeur ν .

Mais une telle disjonction ne peut pas exister. Cela découle de notre modèle intuitif. En effet, étant donné une formule

$$\mathfrak{B}(a_1, b_1, c_1, d_1) \vee \dots \vee \mathfrak{B}(a_r, b_r, c_r, d_r)$$

des dites propriétés 1., 2., nous pourrions remplacer chacune des variables

$$a_1, b_1, c_1, d_1, \dots, a_r, b_r, c_r, d_r,$$

en conservant les égalités, par des numéros de telle sorte que (pour $i = 1, 2, \dots, r$) a_i, d_i soient remplacés par des numéros consécutifs (ce qui est possible en vertu de la propriété 1.); attribuons ensuite à chacun des composants ainsi modifiés $P(k, l)$ la valeur ν pour $k < l$ et la valeur f pour $l \leq k$; alors on aurait pour chaque membre de la disjonction — comme on le voit aisément — la valeur f , et il en serait de même pour la disjonction entière.

Nous reconnaissons ainsi que la formule $\mathfrak{A}(\overline{P})$ ne peut être déduite par le calcul logique ordinaire et qu'il est par conséquent impossible de déduire des axiomes 1), 2), 3) une contradiction par des raisonnements de la logique classique.

La méthode exposée ici s'applique à des systèmes d'axiomes quelconques pourvu que ce soient des axiomes « propres », c'est-à-dire qu'ils ne contiennent d'autres généralités ni d'autres formes existentielles que celles qui se rapportent aux domaines d'individus pris pour base de la théorie.

Donc pour de tels systèmes d'axiomes la méthode des modèles tirés de la théorie intuitive des nombres est généralement recon-

nue suffisante pour démontrer la non-contradiction sans qu'il faille pour cela démontrer la non-contradiction de l'arithmétique.

En particulier, nous reconnaissons de cette manière la non-contradiction de la géométrie axiomatique, à l'exception des axiomes de la continuité, tous les autres axiomes étant des axiomes propres. (Quant à l'axiome d'Archimède, c'est une affirmation existentielle se rapportant aux nombres entiers, alors que les nombres ne font pas partie d'un domaine d'individus de la géométrie axiomatique; ce n'est donc pas un axiome propre.) La méthode s'applique aussi à la géométrie non-euclidienne.

Cependant il faut se rendre compte que cette manière de traiter la question de la non-contradiction ne regarde que les raisonnements exprimables par le calcul logique ordinaire, c'est-à-dire ceux de la logique du premier ordre, où n'interviennent pas des notions générales comme celle d'un nombre quelconque, celle d'une fonction quelconque ou celle d'un ensemble quelconque. Ce n'est donc que dans un sens restreint que la non-contradiction est démontrée par cette méthode.

II. — Les démonstrations de non-contradiction se rattachant à l'axiome du ϵ .

Les recherches tendant à la démonstration de la non-contradiction de l'arithmétique se faisant par étapes, le formalisme arithmétique qui s'offre comme le premier objet de la recherche est celui de la théorie axiomatique des nombres.

Ce formalisme est constitué des éléments suivants:

- 1^o le calcul logique ordinaire;
- 2^o le signe de l'égalité avec les axiomes

$$a = a$$

$$a = b \longrightarrow (A(a) \longrightarrow A(b)) ;$$

3^o le symbole 0 et le symbole ' représentant le passage d'un nombre au suivant, pour lesquels on a les axiomes de Peano

$$a' \neq 0$$

$$a' = b' \longrightarrow a = b$$

$$A(0) \ \& \ (x) (A(x) \longrightarrow A(x')) \longrightarrow A(a) ,$$

le dernier représentant le principe de l'induction complète;