III. — Le théorème de Gödel concernant les démonstrations de non-contradiction.

Objekttyp: **Chapter**

Zeitschrift: **L'Enseignement Mathématique**

Band (Jahr): **34 (1935)**

Heft 1: **L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE**

PDF erstellt am: **16.07.2024**

III. — Le théorème de Gödel concernant les démonstrations de non-contradiction.

A la fin de la conférence précédente, il a été dit qu'on n'a pas réussi à démontrer, par la méthode se rattachant à l'axiome du ε, la non-contradiction de la théorie axiomatique des nombres (à moins qu'on ne fasse des restrictions). Plus généralement, il se trouve qu'aucune des méthodes établies dans le cadre des raisonnements élémentaires combinatoires, prescrit par le programme primordial de la métamathématique de M. HILBERT, ne nous livre cette démonstration cherchée de non-contradiction.

Ce n'est pas faute d'une découverte, que nous nous trouvons dans cette situation. Un théorème de M. GÖDEL nous montre, au contraire (comme je l'ai déjà mentionné), qu'il y a ici un obstacle essentiel. Le raisonnement de M. Gödel, qui conduit à ce théorème, est inspiré de l'idée qui conduit à l'antinomie de RICHARD.

Les divers énoncés de cette antinomie forment un deuxième groupe de paradoxes se distinguant du paradoxe de RUSSELL-ZERMELO.

Il y a une correspondance entre les deux sortes de paradoxes et deux conceptions philosophiques: celle de PLATON du monde des idées et celle de LEIBNIZ d'une langue universelle scientifique.

Le paradoxe de Russell-Zermelo exclut le platonisme absolu, le paradoxe de Richard exclut la réalisation parfaite de l'idée de Leibniz; son sens est environ le suivant: Chaque langue exacte devient sujet à une considération mathématique de ses moyens d'expression. Les éléments dont se constituent les expressions de la langue et les formes de leurs combinaisons engendrent un formalisme dénombrable, et la pensée mathématique dépasse ce formalisme. De là il dérive qu'en joignant les exigences d'une langue exacte à celles d'une langue universelle on rencontre des contradictions. D'autre part, la langue usuelle semble suffire aux deux exigences pourvu qu'on s'en serve d'une manière appropriée. C'est ainsi qu'apparaît le caractère suggestif de l'antinomie.

Dans les formes originaires de cette antinomie, il s'agit toujours des possibilités de définitions. M. Finsler a remarqué qu'on peut transformer l'antinomie de Richard en une autre concernant les démonstrations. Pour cette antinomie modifiée comme pour l'antinomie primitive de Richard, il est encore possible de présenter certaines objections plus ou moins subtiles. Aussi c'était une opinion répandue que l'antinomie de Richard n'avait d'autre signification que celle d'un sophisme reposant sur des inexactitudes de langage, et qu'il suffirait de préciser la langue pour que le paradoxe disparaisse [1].

Il est vrai qu'en précisant la langue, nous faisons disparaître les contradictions résultant du raisonnement de Richard; mais alors on obtient des résultats qui restreignent la possibilité de constituer dans sa totalité une langue universelle, dans le sens même indiqué déjà par l'antinomie de Richard.

C'est ce qui a été mis en évidence par l'argumentation de Gödel qu'il s'agit maintenant d'exposer.

L'argumentation commence par remplacer les prémisses de l'antinomie de Richard par d'autres d'une nature proprement mathématique.

Au lieu de la langue usuelle on considère un formalisme rigoureux $\mathfrak{F}$, comme ceux que la métamathématique a pour objet, c'est-à-dire un formalisme qui traduit les raisonnements d'un certain domaine de la mathématique dans des suites de formules, nommées déductions, et qui sont formées d'après certaines règles; les règles sont supposées telles qu'il soit possible de contrôler machinallement les déductions; cela veut dire que pour une suite donnée de formules on peut décider, par une série d'épreuves se faisant par des comparaisons de figures, si c'est une déduction selon les règles du formalisme ou non.

Quant au domaine de la mathématique représenté par le formalisme $\mathfrak{F}$, nous supposons seulement qu'il contienne la théorie des nombres. Ou plus en détail:

1. La relation d'égalité entre nombres doit être exprimable dans $\mathfrak{F}$, et chaque équation numérique vraie, de même que chaque inégalité numérique juste, doit être déductible dans $\mathfrak{F}$.

---

[1] Il se trouve cependant quelques mathématiciens pour reconnaître dès l'abord, comme L. Chwistek, le sérieux de l'antinomie de Richard.

2. Les définitions par récurrence d'une fonction $\varphi(n)$ ou $\varphi(n, c)$ d'après l'un des schéma que voici [1]:

$$\mathcal{R}\begin{cases} \varphi(0) = \mathfrak{a} & \varphi(0, c) = \mathfrak{a}(c) \\ \varphi(n+1) = \mathfrak{b}(n, \varphi(n)) & \varphi(n+1, c) = \mathfrak{b}(n, c, \varphi(n, c)) \end{cases}$$

(où $\mathfrak{a}$ et $\mathfrak{b}$ sont des expressions introduites plus tôt) doivent être représentées dans $\mathfrak{F}$ de la façon suivante: A chaque équation

$$\psi(a) = b\,,$$

où ψ est une fonction définie par des schéma de la dite structure et par des substitutions, il correspond dans $\mathfrak{F}$ une expression $\mathfrak{B}(a, b)$, dont on obtient une formule déductible en substituant à la variable a le signe représentant un nombre naturel $\mathfrak{k}$, et à b le signe représentant la valeur de $\psi(\mathfrak{k})$.

3. $\mathfrak{F}$ contient le calcul ordinaire logique (du premier ordre) [2].

4. Le principe de l'induction complète est représenté dans $\mathfrak{F}$, soit par une règle ou une formule initiale, ou aussi par un procédé de déduction.

Pour exprimer brièvement les conditions faites, nous dirons que $\mathfrak{F}$ doit être un formalisme rigoureux et suffisant pour la théorie des nombres.

De ces propriétés on peut d'abord conclure que les relations métamathématiques concernant le formalisme $\mathfrak{F}$ peuvent être exprimées dans $\mathfrak{F}$ par des formules. D'abord les symboles et les variables [3] peuvent être numérotés. A partir de cette numérotation on en obtient une autre pour les expressions; et ceci par le procédé suivant. A la suite composée de symboles et variables ayant successivement les numéros

$$n_1, \ldots n_k,$$

---

[1] Le cas de plusieurs paramètres fixes peut être réduit à celui d'un seul paramètre.

[2] On peut affaiblir cette condition. Par exemple il suffirait d'exiger à sa place que $\mathfrak{F}$ contienne le calcul logique de M. HEYTING.

[3] Le formalisme peut contenir plusieurs genres de variables, et de plus les variables libres peuvent être séparées des variables liées.

on attribue le numéro m, dont la décomposition en nombres premiers est donnée par

$$p_1^{n_1} \dots p_k^{n_k}$$

(où p_r dénote le $r$ième nombre premier).

De la même manière on passe de la numérotation des expressions à la numérotation des suites d'expressions [1].

Pour tout n qui appartient à une expression, nous désignons par $\mathfrak{A}_n$ l'expression, dont n est le numéro, et de même, si n appartient à une suite d'expressions, par $\mathfrak{R}_n$ la suite ayant le numéro n.

Parmi les expressions il y a les « formules » de $\mathfrak{F}$, et parmi les suites d'expressions il y a les déductions de $\mathfrak{F}$.

Puisque $\mathfrak{F}$ est un formalisme rigoureux, les affirmations métamathématiques sur $\mathfrak{F}$ se transforment, au moyen des numérotations faites en des propositions arithmétiques élémentaires. En particulier, l'énoncé « m est le numéro d'une suite d'expressions, n celui d'une expression et $\mathfrak{R}_m$ une déduction, dont la formule finale est $\mathfrak{A}_n$ » peut être exprimé par une équation

$$\psi(m, n) = 0 ,$$

$\psi(\cdot\,,\cdot)$ étant une fonction arithmétique définissable au moyen de récurrences d'après les schéma $(\mathcal{R})$ et de substitutions.

En vertu de notre supposition que le formalisme $\mathfrak{F}$ est suffisant pour la théorie des nombres, à l'équation

$$\psi(m, n) = 0$$

il correspond dans $\mathfrak{F}$ une formule contenant m, n, mais pas d'autres variables libres. Dénotons cette formule pour rappeler l'interprétation métamathématique (« $\mathfrak{R}_m$ est déduction de $\mathfrak{A}_n$ ») par Déd (m, n) ou aussi par $\text{Déd}_m(\mathfrak{A}_n)$ [2].

Afin d'arriver au point essentiel du raisonnement de M. Gödel, il suffit d'ajouter un petit corrolaire au dernier résultat. Consi-

[1] A un nombre donné il ne correspond pas toujours une expression, mais seulement à chaque expression appartient un numéro et un seul. Et le même vaut pour les suites d'expressions.

[2] Pour bien comprendre cette forme d'indication, il faut observer que $\mathfrak{A}_n$ n'est pas une partie constituante de la formule $\text{Déd}_m(\mathfrak{A}_n)$.

dérons l'énoncé « $\mathfrak{R}_m$ est une déduction, dont la formule finale s'obtient de $\mathfrak{A}_n$ en substituant pour la variable libre a, à chaque place où elle intervient dans $\mathfrak{A}_n$, le chiffre dénotant le numéro n ».

Cet énoncé, de même que celui considéré tout à l'heure, s'exprime par une équation

$$\chi(m, n) = 0,$$

où $\chi(m, n)$ est une fonction du même caractère élémentaire que $\psi(m, n)$. Et dans le formalisme $\mathfrak{F}$ l'équation $\chi(m, n) = 0$ est aussi représentée par une formule que nous dénotons par

$$\text{Déd}^*(m, n).$$

Pour des chiffres donnés $\mathfrak{m}$, $\mathfrak{n}$, on peut évaluer $\chi(\mathfrak{m}, \mathfrak{n})$, et décider si l'équation $\chi(\mathfrak{m}, \mathfrak{n}) = 0$ est vraie ou fausse.

Dans le premier cas, d'après nos suppositions sur le formalisme $\mathfrak{F}$, la formule

$$\text{Déd}^*(\mathfrak{m}, \mathfrak{n}),$$

dans l'autre la négation

$$\overline{\text{Déd}^*(\mathfrak{m}, \mathfrak{n})}$$

est déductible par le formalisme $\mathfrak{F}$. De plus, dans le premier cas, nous pouvons construire la suite d'expressions $\mathfrak{R}_m$, et celle-ci est une déduction (dans $\mathfrak{F}$) de la formule qui s'obtient de l'expression $\mathfrak{A}_\mathfrak{n}$ en substituant le chiffre $\mathfrak{n}$ à la variable a.

Soit maintenant $\mathfrak{k}$ le numéro de la formule

$$(x)\,\overline{\text{Déd}^*(x, a)}.$$

Supposé que pour un chiffre donné $\mathfrak{m}$ l'équation

$$\chi(\mathfrak{m}, \mathfrak{k}) = 0$$

soit vraie, alors la formule

$$\text{Déd}^*(\mathfrak{m}, \mathfrak{k})$$

serait déductible dans $\mathfrak{F}$; de plus, la suite d'expressions $\mathfrak{R}_\mathfrak{m}$ serait une déduction de la formule

$$(x)\,\overline{\text{Déd}^*(x, \mathfrak{k})}$$

(qu'on obtient de $\mathfrak{A}_{\mathfrak{k}}$, en substituant $\mathfrak{k}$ pour a) ; et de cette formule découlerait

$$\overline{\text{Déd}^* (\mathfrak{m}, \mathfrak{k})} ;$$

mais alors le formalisme $\mathfrak{F}$ serait contradictoire. Donc, si le formalisme $\mathfrak{F}$ n'implique pas de contradictions, il faut que pour chaque chiffre $\mathfrak{m}$ l'équation

$$\chi (\mathfrak{m}, \mathfrak{k}) = 0$$

soit fausse, et que la formule

$$\overline{\text{Déd}^* (\mathfrak{m}, \mathfrak{k})}$$

soit déductible dans $\mathfrak{F}$.

D'autre part, sous la même supposition de la non-contradiction de $\mathfrak{F}$, la formule

$$(x) \overline{\text{Déd}^* (x, \mathfrak{k})}$$

ne peut pas être déductible dans $\mathfrak{F}$. Car cette formule s'obtient de $\mathfrak{A}_{\mathfrak{k}}$ en substituant $\mathfrak{k}$ pour a. Donc, si nous avions pour elle une déduction, dont le numéro (dans la numérotation des suites d'expressions) était $\mathfrak{m}$, alors la formule

$$\text{Déd}^* (\mathfrak{m}, \mathfrak{k})$$

serait déductible, et il y aurait une contradiction dans $\mathfrak{F}$.

De là le résultat : S'il peut être montré que le formalisme $\mathfrak{F}$ est non-contradictoire, alors il y a une proposition élémentaire arithmétique démontrable qui peut être exprimée, mais pas déduite de $\mathfrak{F}$. En effet, on démontre alors que pour chaque chiffre $\mathfrak{m}$ l'équation $\chi(\mathfrak{m}, \mathfrak{k}) = 0$ est fausse, tandis que la formule exprimant ce théorème dans le formalisme $\mathfrak{F}$, savoir

$$(x) \overline{\text{Déd}^* (x, \mathfrak{k})}$$

n'est pas déductible dans $\mathfrak{F}$.

Voilà un résultat fort et remarquable. Mais ce n'est pas celui des résultats de M. Gödel, auquel j'ai fait allusion au commencement de cette conférence. Pour y parvenir, il faut renforcer le raisonnement, moyennant la supposition que le formalisme $\mathfrak{F}$ contient le calcul logique et le principe de l'induction complète.

Je me contente ici d'indiquer en peu de mots le cours du raisonnement.

En vertu de la relation entre les fonctions $\psi(m, n)$ et $\chi(m, n)$, la formule

$$\text{Déd}^* (m, \mathfrak{k}) \longrightarrow \text{Déd}_m ((x) \overline{\text{Déd}^* (x, \mathfrak{k})}) ,$$

(où m est une variable de nombre), peut être déduite dans $\mathfrak{F}$. De cette formule on tire par le calcul logique

$$(\text{E}x) \text{ Déd}^* (x, \mathfrak{k}) \longrightarrow (\text{E}y) \text{ Déd}_y ((x) \overline{\text{Déd}^* (x, \mathfrak{k})}) . \qquad (1)$$

D'autre part, puisque la fonction $\chi(m, n)$ est définie par récurrence selon les schéma $(\mathcal{R})$, on peut déduire dans $\mathfrak{F}$ une formule

$$\text{Déd}^* (m, \mathfrak{k}) \longrightarrow (\text{E}y) \text{ Déd} (y, \zeta(m)) ,$$

où m est de nouveau une variable de nombre et $\zeta(m)$ est une fonction arithmétique définie par récurrence, dont la valeur pour un chiffre donné $\mathfrak{a}$ est le numéro de l'expression Déd* $(\mathfrak{a}, \mathfrak{k})$. De cette formule découle

$$(\text{E}x) \text{ Déd}^* (x, \mathfrak{k}) \longrightarrow (\text{E}y) \text{ Déd}_y (\overline{(x)} \overline{\text{Déd}^* (x, \mathfrak{k})}) . \qquad (2)$$

Les formules (1), (2) donnent

$$(\text{E}x) \text{ Déd}^* (x, \mathfrak{k}) \longrightarrow (\text{E}y) \text{ Déd}_y (0 \neq 0) ,$$

et de cette formule on déduit par le calcul logique

$$(x) \overline{\text{Déd}_x (0 \neq 0)} \longrightarrow (x) \overline{\text{Déd}^* (x, \mathfrak{k})} .$$

A l'aide de cette formule déductible dans $\mathfrak{F}$ on peut passer de l'antécédent au conséquent. Mais l'antécédent est la formule exprimant la non-contradiction du formalisme $\mathfrak{F}$; et quant au conséquent, nous avons constaté tantôt qu'il n'est pas déductible par le formalisme $\mathfrak{F}$, à moins que celui-ci ne soit contradictoire.

Nous sommes donc conduits à l'énoncé suivant: Si le formalisme $\mathfrak{F}$ est non-contradictoire, alors la formule exprimant la non-contradiction de $\mathfrak{F}$ ne peut pas être déduite dans le formalisme $\mathfrak{F}$ même.

Ce résultat s'applique à chaque formalisme rigoureux et suffisant pour la théorie des nombres, c'est-à-dire satisfaisant aux conditions 1. — 4. indiquées tout à l'heure. Déjà le formalisme de la théorie axiomatique des nombres possède les dites propriétés. En effet on peut montrer que les définitions récurrentes se faisant d'après les schéma ($\mathcal{R}$) ont leur représentation dans ce formalisme; et quant aux autres conditions, il est évident qu'elles y sont remplies.

A fortiori nos suppositions se trouvent réalisées par les formalismes plus étendus, desquels la théorie axiomatique des nombres peut être déduite, comme celui de l'analyse infinitésimale, ceux de la théorie axiomatique des ensembles, et celui des « Principia Mathematica », soit dans la forme originaire (avec l'axiome de la réductibilité) ou dans la forme simplifiée.

Aucun de ces formalismes, pourvu qu'il soit non-contradictoire, ne permet de déduire le théorème arithmétique équivalent à l'affirmation métamathématique de sa non-contradiction.

En particulier, un raisonnement démontrant la non-contradiction de la théorie axiomatique des nombres ne peut pas être traduit dans cette théorie là.

Ce résultat explique le fait, qui nous a étonnés, que tous les essais de démontrer la non-contradiction de la théorie axiomatique des nombres par les méthodes élémentaires combinatoires n'ont pas réussi.

En effet, il faudrait, pour atteindre ce but, trouver un raisonnement élémentaire combinatoire qui ne puisse être formalisé dans la théorie axiomatique des nombres. Mais, à ce qu'il semble, il n'y a pas de tels raisonnements.

Selon toute apparence, le cadre dans lequel M. Hilbert enfermait les méthodes inspirées du « point de vue fini » n'est pas assez large pour une théorie de la démonstration. La question est donc de savoir si ce cadre peut être élargi sans abandon du but que poursuit la métamathématique. Nous verrons que c'est bien le cas.

IV. — **La relation entre la théorie axiomatique des nombres et l'arithmétique intuitionniste.**

Le théorème général de Gödel sur les démonstrations de non-contradiction s'applique en particulier, comme nous l'avons