

# RÉPONSE A QUELQUES OBJECTIONS

Autor(en): **Errera, A.**

Objekttyp: **Article**

Zeitschrift: **L'Enseignement Mathématique**

Band (Jahr): **34 (1935)**

Heft 1: **L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE**

PDF erstellt am: **15.08.2024**

Persistenter Link: <https://doi.org/10.5169/seals-26606>

## **Nutzungsbedingungen**

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern. Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

## **Haftungsausschluss**

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

## RÉPONSE A QUELQUES OBJECTIONS

PAR

A. ERRERA (Bruxelles).

---

1. — A la suite de notre communication <sup>1</sup>, deux objections ont été faites par MM. BERNAYS et CHEVALLEY. Nous remercions *L'Enseignement Mathématique* de nous fournir la possibilité d'y répondre sans tarder et de prévenir certaines autres critiques que celles-là pourraient suggérer. Nous avons aussi pris connaissance d'un exposé intéressant et synthétique de l'intuitionnisme par M. HEYTING <sup>2</sup>, qui nous oblige à préciser certains points. Plusieurs des idées que nous allons développer nous ont été indiquées par M. BARZIN (notamment celles des paragraphes 10 et 11 et la démonstration développée dans l'appendice).

2. — Lorsqu'en 1926, M. BARZIN et moi <sup>3</sup> avons trouvé une contradiction dans les propositions tierces, nous ne pouvions tenir compte que de l'intuitionnisme de M. BROUWER et des règles qu'il avait énoncées.

Or, en 1930, M. HEYTING a publié <sup>4</sup> trois notes intitulées « Die formalen Regeln der intuitionistischen Logik ». Il y reprend les exigences de son maître et en ajoute de nouvelles; en d'autres termes, il ne rejette pas seulement les règles de la Logique classique refusées par M. BROUWER, mais il en repousse d'autres encore et, notamment, celle-ci, qui constitue la première partie de notre postulat 4,22, « quand une proposition implique la somme logique de deux autres,

---

<sup>1</sup> Sur la crise contemporaine des Mathématiques, conférence faite à Genève, le 18 juin 1934.

<sup>2</sup> A. HEYTING, *Mathematische Grundlagenforschung. Intuitionismus-Beweistheorie*, (*Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete*, Bd. 3, H. 4, J. Springer, Berlin, 1934.)

<sup>3</sup> M. BARZIN et A. ERRERA, Sur la logique de M. Brouwer. (*Bull. Cl. Sc., Acad. R. Belg.*, Bruxelles, 1927.)

<sup>4</sup> A. HEYTING, Die formalen Regeln der intuitionistischen Logik. (*Sitzungsberichte der Preussischen Akademie der Wissenschaften, Phys.-Math. Kl.*, Berlin, 1930.)

elle implique l'une ou bien elle implique l'autre»: si  $p \supset q \vee r$ , alors  $p \supset q$  ou  $p \supset r$ . M. HEYTING ne l'admet pas.

Sa position constitue évidemment une exigence supplémentaire, très gênante pour le raisonnement mathématique, puisqu'elle interdit, lorsqu'on arrive à un dilemme, d'étudier les cas séparément.

Or, dans notre démonstration<sup>5</sup>, nous avons précisément employé une alternative du type  $p \supset q \vee r$ , dans laquelle  $p$  est remplacé par  $\sim \sim p$ ,  $q$  par  $\sim (\sim p \vee p')$  et  $r$  par  $\sim (\sim p' \vee p'')$ . Mais il n'est pas difficile de tourner cette difficulté.

3. — Nous pouvons de même en éviter une autre. M. HEYTING n'accepte pas la proposition, qui forme la réciproque de notre lemme 2, « la condition nécessaire de la fausseté d'un produit logique est la fausseté d'un au moins de ses termes »:  $\sim (pq) \supset \sim p \vee \sim q$ .

Notre première démonstration de cette proposition contenait une faute, qui nous a été signalée par M. AVSITIDYSKY; nous l'avons corrigée dans notre seconde note<sup>6</sup>, annexe 2, mais en utilisant le postulat d'exportation (qu'admet d'ailleurs M. HEYTING), « si une proposition implique qu'une autre proposition en implique une troisième, alors le produit logique des deux premières implique la troisième et réciproquement »:  $p \cdot \supset \cdot q \supset r \equiv pq \supset r$ .

4. — Au lieu de faire appel à ce postulat, on peut encore opérer comme nous l'avons fait dans l'annexe 3 du même article, en donnant de la réciproque du lemme 2 la version affaiblie, « si le produit logique de deux propositions est faux, alors, ou bien l'une des propositions est fautive ou bien elles sont tierces toutes deux ». Et alors, pour établir la contradiction, nous avons un troisième cas à envisager, qu'on pourrait désigner par  $q'r'$ . Mais, conformément à l'objection de M. BERNAYS, on n'a pas le droit, si l'on veut appliquer la logique de M. HEYTING, d'envisager ce cas séparément. Cependant, il est encore possible de l'éliminer, en montrant que  $q'r'$  est contradictoire.

5. — Si M. HEYTING s'avisait de refuser les démonstrations, même amendées, comme il est dit plus haut, en arguant que, pour le lemme 2, même affaibli, on s'appuie sur une énumération de cas, on pourrait également se tirer d'affaire, en partant d'une autre réciproque affaiblie de ce lemme. Comme ce développement demande d'assez longs calculs, nous prions le lecteur de se référer à l'appendice de la présente note.

<sup>5</sup> *Loc. cit.* 3, page 12.

<sup>6</sup> M. BARZIN et A. ERRERA, Sur le principe du tiers exclu. (*Arch. Soc. B. de Philos.*, fasc. 2, Bruxelles, 1929.)

6. — En 1932<sup>7</sup>, M. KOLMOGOROFF a donné une très ingénieuse interprétation, dans la logique classique exprimée en termes de problèmes, de la logique intuitionniste de M. HEYTING, interprétation qui aurait pour effet d'établir la non-contradiction de celle-ci. Nous allons exposer les réserves que nous suggère la lecture de ce travail.

Afin de montrer que la logique de M. HEYTING est, en quelque sorte, isomorphe à la logique classique en termes de problèmes, on fait correspondre un « problème »  $p$  à une proposition vraie de M. HEYTING; et à une proposition fausse, le problème  $\neg p$  « à supposer qu'on a résolu le problème  $p$ , tirer de là une contradiction ».

M. KOLMOGOROFF exprime dans ce langage les différents symboles de la logique de M. HEYTING, par exemple:  $p \vee q$  désignera le problème « résoudre au moins l'un des deux problèmes  $p, q$  » et l'implication  $p \supset q$ , le problème « ramener la solution de  $q$  à la solution de  $p$  ».

Après avoir fait quelques conventions de ce genre, cet auteur montre que tous les postulats de M. HEYTING sont formellement vérifiés. Il semble donc qu'il ait fourni, en logique classique, une image du système intuitionniste.

7. — Voyons cependant les choses de plus près. Qu'est-ce qu'un problème ? C'est une proposition incertaine, c'est-à-dire dont on ne sait pas, si elle est vraie ou fausse. Dans le langage ordinaire des propositions, le symbole  $p$  signifie donc « démontrer  $p$  » et le symbole  $\neg p$  « tirer une contradiction de l'hypothèse qu'on a démontré  $p$  ».

M. KOLMOGOROFF insiste sur le fait que  $\neg p$  ne signifie pas « démontrer que  $p$  est insoluble ». On pourrait prétendre de même que, littéralement,  $\neg p$  ne veut pas dire « tirer une contradiction de la proposition  $p$  ». Mais, bien entendu, si l'on sait tirer cette contradiction, alors on a résolu le problème  $\neg p$ , puisqu'on sera en contradiction avec l'hypothèse qu'on pourra résoudre, c'est-à-dire démontrer  $p$ .

Comme, dans la suite, l'auteur suppose qu'on a résolu un certain nombre de problèmes et qu'on en a constitué une liste, on semble d'abord conduit à désigner par  $\neg p$ , tout problème qui n'est pas sur la liste, puisque cela est en contradiction avec l'hypothèse qu'on l'a résolu. Mais alors, n'importe quel problème serait  $p$  ou  $\neg p$  et le tiers serait exclu. Ce n'est évidemment pas ce que M. KOLMOGOROFF veut dire. Sa définition de  $\neg p$  est donc ambiguë et elle ne peut malgré tout signifier que ceci: « tirer de  $p$  une contradiction » ou, si l'on préfère, « résoudre  $p$  par la négative ».

8. — La liste des problèmes résolus dont parle l'auteur est naturellement sujette à changer d'heure en heure et à varier selon les

<sup>7</sup> A. KOLMOGOROFF, Zur Deutung der intuitionistischen Logik. (*Mathematische Zeitschrift*, Bd. 35, pp. 58 à 65, J. Springer, Berlin, 1932.)

personnes, d'autant plus, comme le veut M. HEYTING, qu'on ne raisonne pas d'après des normes fixes, mais que chaque démarche doit être éprouvée d'après son évidence (qui est variable). Par exemple, M. KOLMOGOROFF identifie les postulats avec des problèmes élucidés et déclare ensuite qu'il ne s'adresse qu'aux lecteurs qui en acceptent la solution.

Mais alors, certains problèmes ayant été résolus dans un sens ou dans l'autre, peut-on nous empêcher d'appeler tiers un problème irrésolu ?

On objectera peut-être que, par le fait d'une démonstration, un problème cessera d'être tiers et qu'on n'a pas le droit de raisonner sur une notion aussi changeante. Mais elle ne l'est pas plus que la notion complémentaire des problèmes résolus, sur laquelle se fondent tous les raisonnements de l'auteur.

Nous pourrions donc dire que tout problème est nécessairement démontré ou réfuté ou incertain; et partir de cette constatation pour établir, dans le langage même de M. KOLMOGOROFF, la contradiction que nous avons trouvée dans le brouwérisme <sup>8</sup>.

9. — Nous pourrions encore faire d'autres réserves de détails à la méthode du logicien moscovite, par exemple: est-on jamais sûr, dans un de ses raisonnements, que l'on n'enchaîne que des problèmes et, qu'au milieu de l'argumentation, ne se mêlent pas des propositions démontrées ou réfutées et qui ne sont plus des problèmes ?

Ou encore attirer l'attention sur un fait bizarre: M. KOLMOGOROFF est obligé, pour les besoins de sa démonstration, de poser la convention suivante qui nous semble assez factice: la preuve qu'un problème n'a pas de sens doit être considérée comme sa solution? Il s'ensuit que le symbole  $p$  doit s'appliquer tantôt à des problèmes, tantôt à des expressions qui n'ont pas de sens, ce qui nous paraît bien dangereux.

10. — Mais à côté de ces remarques particulières, la méthode même de M. KOLMOGOROFF nous paraît mal fondée et inopérante.

Que prétend-il, en effet, sinon justifier le système intuitionniste de MM. BROUWER et HEYTING, en le traduisant dans le langage classique: le *vrai* brouwérien devient « démontrer  $p$  »; le *faux* brouwérien, « tirer de  $p$  une contradiction » ? Or, démontrer  $p$  ou tirer de  $p$  une contradiction, est-ce autre chose qu'affirmer le vrai ou le faux brouwérien ?

Car le vrai brouwérien ne s'identifie pas du tout avec la notion du vrai, à laquelle les mathématiciens classiques étaient arrivés: pour

<sup>8</sup> *Loc. cit.* 3 et 6, pp. 11 à 13.

eux, vrai signifie non-contradictoire; en revanche, pas plus que MM. BROUWER et HEYTING n'acceptent ce fondement de la vérité, M. KOLMOGOROFF ne peut considérer comme résolu, un problème dont on aurait simplement établi la non-contradiction.

Ce qu'il a publié, ce n'est donc pas du tout une traduction de l'intuitionnisme dans le langage classique, mais une simple répétition du système de M. HEYTING, avec la substitution de quelques synonymes: le vrai et le faux seront baptisés problèmes.

Et toutes les conclusions qu'on aurait pu tirer d'une vraie traduction portent à faux.

11. — M. BERNAYS a, lui aussi, énoncé une objection fondamentale à notre méthode; la voici:

Dans tous ses travaux, M. HEYTING ne fait aucune allusion à des propositions tierces; d'ailleurs, comme nous l'avons rappelé dans notre conférence, on ne pourra jamais en construire. Mais nous avons dit aussi, que les intuitionnistes doivent conserver l'éventualité du tiers, sinon ils auraient introduit dans le raisonnement des complications gratuites et inutiles. Pour notre démonstration, nous raisonnons donc sur cette éventualité, dont nous tirons une contradiction. Et M. BERNAYS se demande si nous en avons le droit.

Il est clair que M. HEYTING, et M. KOLMOGOROFF après lui, paraissent échapper à cette contradiction, puisqu'ils passent le tiers sous silence et ne sortent pas du domaine des propositions vraies et des propositions fausses, dont les règles font partie de la Logique classique.

Mais le nœud de la révolution de M. BROUWER n'est pas d'avoir montré qu'on peut raisonner avec cette partie seulement, c'est-à-dire, selon une comparaison plaisante, qu'il y a moyen de marcher sur une jambe; mais d'avoir opposé son veto aux autres principes usuels, en les déclarant faux et inacceptables, ce qui revient à interdire avec force d'employer les deux pieds.

Ce point essentiel et original distingue la position des Brouwériens de celle de LOBATCHEWSKI, par exemple, qui a montré qu'on peut construire une géométrie en niant le postulatum d'Euclide, dont il n'affirme pas cependant la fausseté.

D'ailleurs, afin de justifier son interdiction, M. BROUWER aurait dû, pour être cohérent, démontrer que le principe du tiers exclu est faux. Or, on a même démontré le contraire: il est faux qu'il soit faux.

Ne faut-il pas pourtant s'étonner que, nulle part, dans le symbolisme de M. HEYTING ni dans celui de M. KOLMOGOROFF, on ne trouve d'allusion au veto brouwérien? Celui-ci n'apparaît que dans des commentaires. Et la carence des intuitionnistes, lorsqu'ils énumèrent les fondations de leur système, est d'en passer sous silence la pierre angulaire.

La raison de cette omission est maintenant bien claire. S'ils avaient parlé du tiers, alors ils auraient dû opter entre deux attitudes :

Ou bien reconnaître que le tiers ne sera jamais réalisé; et alors leur révolution devenait vaine, puisque toute proposition pouvait être décrite en termes de vrai, de faux, de certain et d'incertain: ils auraient donc construit à grand'peine un tiroir destiné à rester vide éternellement.

Ou bien conserver l'éventualité du tiers; mais cette éventualité même les eût conduits tout droit à la contradiction.

Quand on nous reproche d'appliquer le calcul formel au tiers qui, dit-on, n'est pas un objet mathématique, on nous reproche en somme d'avoir traduit en symboles, et d'avoir été seuls à traduire, l'affirmation cardinale de l'intuitionnisme brouwérien.

12. — Nous voudrions conclure cet article par un petit dialogue entre un *intuitionniste* et, ne disons pas un *formaliste*, car ce mot a acquis une signification très particulière depuis les beaux travaux de M. HILBERT, mais plutôt un logicien *classique*.

*Le Classique* : Vous voulez bien reconnaître avec moi qu'il y a des propositions vraies et qu'il y a des propositions fausses. Laissons de côté les postulats nouveaux qu'on pourrait rencontrer et qui sont des propositions indépendantes de celles qu'on a déjà employées: un postulat peut être pris arbitrairement pour vrai ou pour faux et donne lieu à une bifurcation de la science, puisqu'on peut étudier les conséquences de chacune des attitudes. Quoi qu'il en soit des postulats, j'admettrai toujours que, quand une proposition n'est pas vraie, elle est fausse et que quand elle n'est pas fausse, elle est vraie.

*L'Intuitionniste* : Je ne puis accepter cette alternative; car pour moi, une proposition n'est vraie, que si je l'ai démontrée; et fausse, que si j'en ai tiré une contradiction. Car je n'aime à parler que de ce que je sais prouver. Le seul moyen d'établir qu'une proposition n'est pas vraie, c'est d'en tirer une contradiction; alors, je dis avec vous qu'elle est fausse. Mais si même je prouve qu'une proposition n'est pas fausse, je ne suis pas sûr qu'elle soit vraie.

*Le Cl.* : Donc, vous n'admettez pas que toute proposition soit vraie ou fausse. Vous ne voulez pas exclure le tiers; et une proposition pourrait, d'après vous, être tierce, c'est-à-dire ni vraie ni fausse? Pourquoi, après une telle révolution, ne parlez-vous jamais de ces propositions tierces? Pour un révolutionnaire, vous êtes bien timide!

*L'Int.* : N'essayez pas de me prendre par l'amour-propre. Je ne connaîtrai jamais de proposition tierce, vous-même l'avez démontré! Donc, je n'en parle pas. De plus, si je savais qu'une proposition *donnée* est tierce, il serait impossible, absurde qu'elle fût vraie; et alors elle serait fausse.

*Le Cl.* : Cela revient à dire qu'une proposition donnée bien déterminée, est nécessairement vraie ou bien fausse.

*L'Int.* : Oui, si on en sait quelque chose. Mais on pourrait n'en rien savoir; et, dans ce cas, je n'aime pas à me prononcer.

*Le Cl.* : Donc si nous excluons le tiers en droit, vous l'excluez en fait. Pour vous, il n'y a pas de tiers actuel; vous en conservez seulement l'éventualité, mais vous vous résignez à ne jamais la voir réalisée. Vous êtes dans le domaine du rêve; et vous pourriez aussi bien prévoir l'éventualité du quart, du quint et de l'aleph-zéro !

*L'Int.* : Précisément, tout cela ce sont des rêves, qui n'ont rien à voir avec l'intuition mathématique.

*Le Cl.* : Si donc une proposition donnée n'est pas vraie ...

*L'Int.* : Pour la troisième fois, elle est fausse !

*Le Cl.* : Et si elle n'est pas fausse ...

*L'Int.* : Elle n'est pas nécessairement vraie.

*Le Cl.* : Ici, je ne comprends plus. Puisque vous reconnaissez vous-même qu'une proposition donnée ne sera jamais tierce, alors, si on sait qu'elle n'est pas fausse, elle ne peut être que vraie.

*L'Int.* : Je n'aime pas cette preuve par énumération des cas, parce que j'ai toujours peur qu'on en oublie.

*Le Cl.* : Vrai, faux, tiers, je ne vois pas ce qu'on pourrait avoir oublié. Je le répète, vous êtes un révolutionnaire timoré et je vous accuse, à force de prudence, d'être le plus imprudent des hommes !

#### APPENDICE AU PARAGRAPHE 5.

1. — Etablissons d'abord la réciproque affaiblie annoncée. Pour cela, rappelons la relation 4.31 de M. HEYTING<sup>9</sup> et ses formules 4.6 et 4.44 transposées. (Nous employons, comme il est d'usage, le signe  $\sim$  là où M. HEYTING emploie le signe  $\neg$ .)

$$\sim (ab) \supset \sim \sim \sim (ab)$$

$$\sim \sim \sim (ab) \supset \sim (\sim \sim a \cdot \sim \sim b)$$

$$\sim (\sim p \cdot \sim q) \supset \sim \sim (p \vee q) .$$

Remplaçant  $p$  par  $\sim a$  et  $q$  par  $\sim b$ , on tire par syllogisme

$$\sim (ab) \supset \sim \sim (\sim a \vee \sim b) . \quad (\alpha)$$

<sup>9</sup> Loc. cit. 4.



2. — Pour démontrer notre théorème fondamental<sup>10</sup>, nous partions d'une relation générale, qui pouvait s'écrire

$$p \supset \sim [(\sim p \vee p') \cdot (\sim p' \vee p'')] \equiv \sim (ab)$$

où  $a$  représente  $(\sim p \vee p')$  et  $b$  représente  $(\sim p' \vee p'')$ .

En appliquant la formule ( $\alpha$ ), nous utiliserons encore la relation 4.44, et nous obtiendrons

$$p \supset \sim \sim [(\sim \sim p \cdot \sim p') \vee (\sim \sim p' \cdot \sim p'')] . \quad (\beta)$$

Combinons cette relation avec 4.3

$$p \supset \sim \sim p ,$$

mais en utilisant 4.6 et 3.41

$$p \supset \sim \sim [p(\sim \sim p \cdot \sim p') \vee p(\sim \sim p' \cdot \sim p'')] . \quad (\gamma)$$

Interpétons la dernière parenthèse  $(\sim \sim p' \cdot \sim p'')$ . Elle exprime qu'il est faux que  $p'$  soit faux et qu'il est faux que  $p'$  soit tiers; donc  $p'$  est vrai. Et réciproquement. Nous pouvons donc remplacer la parenthèse par  $p'$ , d'où

$$p \supset \sim \sim [p(\sim \sim p \cdot \sim p') \vee pp'] \quad (\delta)$$

qui est du type

$$p \supset \sim \sim [q \vee r] . \quad (\varepsilon)$$

D'autre part, 2.271 et 4.47 donnent

$$\sim r \cdot \supset . [q \vee r] \supset q .$$

Transposant deux fois l'implication qui se trouve dans le second membre, on écrira

$$\sim r \cdot \supset . \sim \sim [q \vee r] \supset \sim \sim q . \quad (\zeta)$$

Combinant ( $\varepsilon$ ) et ( $\zeta$ ) à l'aide de 2.23 et 2.15, il vient

$$p \cdot \sim r \supset \sim \sim q .$$

Or  $r$  représente  $pp'$ ; et comme une proposition n'est jamais simultanément vraie et tierce, on peut affirmer  $\sim r$ , c'est-à-dire  $\sim (pp')$ . Donc il reste

$$p \supset \sim \sim q .$$

<sup>10</sup> *Loc. cit.* 3, page 11.

Remplaçant  $q$  par sa valeur, on obtient

$$p \supset \sim \sim [p (\sim \sim p \cdot \sim p')] . \quad (\eta)$$

Or 2.2 permet d'écrire (les parenthèses étant sans objet)

$$p \cdot \sim \sim p \cdot \sim p' \supset \sim p' ;$$

donc, transposant deux fois et introduisant dans  $(\eta)$ , il vient avec 4.32

$$p \supset \sim p' .$$

Transposant encore, on trouve enfin

$$p' \supset \sim p$$

c'est-à-dire, si  $p$  est tiers, alors  $p$  est faux, ce qui est une absurdité.

C.Q.F.D.

## CHRONIQUE

### Congrès International des Mathématiciens.

*Oslo, 13-18 juillet 1936.*

Le prochain Congrès international des Mathématiciens aura lieu à Oslo du 13 au 18 juillet 1936. Le *Comité exécutif* a été composé comme suit:

*Présidents:* MM. Alf GULDBERG et Carl STÖRMER,  
MM. Viggo BRUN, Poul HEEGAARD, Fr. LANCE-NIELSEN,  
Th. SKOLEM;

*Secrétaire-général:* M. Edgar B. SCHIELDROP.

Les travaux sont répartis sur *sept sections*: I. Algèbre et Théorie des Nombres. — II. Analyse. — III. Géométrie et Topologie. — IV. Calcul des Probabilités; Assurances; Statistique Mathématique. — V. Astronomie. — VI. Mécanique et Physique mathématique. — VII. Philosophie et Histoire des Mathématiques; Enseignement.

En choisissant pour le Congrès la période de mi-juillet le Comité