De toutes façons, le sujet ne semble pas pouvoir être débarrassé complètement de toute difficulté On le voit ici quand il faut développer e^x en série entière; on s'appuie sur la formule de Maclaurin dont il faut donner alors une démontration dans une note placée à la fin de l'exposé. Cela vaut-il mieux qu'une autre filiation ? Quoiqu'il en soit l'hyperbole équilatère mérite bien d'être prise en considération. La tentative de M. Tripier me rappelle une *Etude de l'hyperbole équilatère* publiée en 1927 (à la même librairie) par M. J. Lemaire. C'est très différent; il est alors question de géométrie (voir *L'Ens. mathématique*, 26e année, 1927, p. 166). Mais il est remarquable que la courbe puisse servir à amorcer l'Analyse et une géométrie fort étendue pleine de curiosités généralement inconnues. Qui sait que le rayon de courbure est moitié de la normale limitée à la courbe ? Il y a comme cela beaucoup d'autres simplicités dont il reste à profiter.

A. Buhl (Toulouse).

D. Hilbert u. P. Bernays. — **Grundlagen der Mathematik.** Erster Band (Die Grundlehren der mathematischen Wissenschaften, B. LX). — Un vol. in-8° de 471 p., broché RM. 36. Julius Springer, Berlin 1934.

Voici, rédigée par M. P. Bernays, la première et déjà volumineuse partie de l'ouvrage sur les Fondements des Mathématiques qui doit exposer les vues de l'école formaliste, des débuts jusqu'aux résultats les plus actuels. Dans l'espoir — dit M. Hilbert dans une courte Préface — de reconnaître finalement que les méthodes traditionnelles et habituelles des mathématiques, individuellement et dans leur ensemble, ne peuvent impliquer de contradiction.

La publication de cet ouvrage a été retardée et son volume notablement accru du fait des résultats de Herbrand et de Gödel, qui ont créé une situation nouvelle dont il a fallu tenir compte.

Les §§ 1 et 2 introduisent le lecteur dans les problèmes de la non-contradiction d'un système d'axiomes et de la décision dans un champ logique (Entscheidungsproblem). En particulier, le second paragraphe contient une délimitation de ce qu'il faut entendre par « finit », « finites Schliessen » et « finiter Standpunkt », notions qui, on le sait, sont à la base de la doctrine hilbertienne (p. 32). L'auteur donne quelques exemples de « raisonnements concrets » conformes à sa délimitation; il indique ensuite certains points où le raisonnement mathématique déborde le domaine du « concret immédiat » (finit !). Les difficultés qui se présentent alors dans l'appréciation de la négation d'un jugement général ou d'une affirmation d'existence sont confrontées avec les réserves de Brouwer concernant l'application du principe du tiers exclu.

Les §§ 3, 4 et 5 sont consacrés à l'exposition de la logique formelle. Le § 3 reprend le problème de la formalisation des règles de la logique et du raisonnement à ses débuts, et nous conduit jusqu'à la logique des prédicats. Le § 4 s'occupe de la formalisation de celle-ci. Les deux notions: identiquement juste dans un champ à k éléments (k- zahlig identisch) et identiquement juste dans un champ fini (im Endlichen identisch) conduisent à une démonstration de l'absence de contradiction dans le calcul des prédicats. Les deux notions de la transmutabilité (Ueberführbarkeit) et de l'équivalence déductive (Deduktionsgleichheit) interviennent dans la réduction des expressions à une forme normale. Le § 5 élargit le calcul des prédicats par l'introduction des axiomes de l'identité et résout l'Entscheidungsproblem dans quelques cas plus ou moins spéciaux.

Avec le § 6 nous entrons dans le cercle des questions qui forment le fond de la discussion actuelle sur les fondements. Un système de 5 axiomes, concernant la relation $a < b$ et la relation « du précédent au suivant » est maintenant introduit, et l'absence de contradiction démontrée par la méthode de réduction de Herbrand et Pressburger. Ce système fait ensuite place à un système (A) de 7 axiomes, dont le principe d'induction ne peut pas être déduit. Celui-ci sera introduit dans le système (B), dont découle alors le « principe du plus petit nombre ». Les conclusions restent toutefois en suspens dans les cas où intervient au moins une « variable-formule ». Le système (B) ne suffit pas pour fonder l'arithmétique. Sous sa forme récursive », celle-ci fait l'objet du § 7. Il se révèle nécessaire d'y introduire successivement les axiomes de l'addition (D) puis ceux de la multiplication (Z). Ce dernier système embrasse toute l'arithmétique, mais la méthode de réduction ne lui est plus applicable. Le § 8 enfin est consacré à l'introduction du symbole iota et à son élimination.

Le problème de l'absence de contradiction dans le système (Z) et les questions attenantes sont renvoyés au second volume.

Ce livre dresse un monument imposant bien qu'encore incomplet, à la doctrine de l'école hilbertienne. Et les réserves qu'on est tenté de formuler s'adressent, non pas à l'ouvrage en lui-même, dont il faut louer à la fois l'exactitude, la clarté et l'ampleur inégalée de la documentation — mais à cette doctrine elle-même. Les notions mêmes de raisonnement dans le concret » (finites Schliessen), de système purement formel (Formalismus) et de la démonstration elle-même (Beweisverfahren) nous paraissent susceptibles d'une analyse plus approfondie. Nous croyons que les résultats de cette analyse pourraient être de nature à affaiblir la force démonstrative de telle ou telle démonstration de non-contradiction.... Mais ceci ne doit pas nous empêcher de sincèrement admirer l'effort dont l'ouvrage dont nous parlons est l'éloquent témoignage. F. Gonseth (Zurich).

Rudolf Carnap. — **Logische Syntax der Sprache.** (Schriften zur Wissenschaftlichen Weltauffassung. Band 8). — Un volume p.-8° de 274 pages; broché RM 21,80; Julius Springer in Wien.

Le livre « Logische Syntax der Sprache » est de M. Carnap, l'un des plus éminents représentants de l'école néo-positiviste de Vienne. Il a pour but de faire la théorie de la logique comme ensemble de propriétés du langage.

La syntaxe logique est l'étude des phrases d'un certain langage au point de vue *formel*, c'est-à-dire l'étude de la formation et des transformations licites de ces phrases en faisant abstraction de leur signification. On sait que les exigences de la rigueur mathématique, puis les théories sur les fondements des diverses sciences, ont montré la nécessité absolue de « formaliser » les connaissances, c'est-à-dire de raisonner au moyen de règles définies, sans faire appel à l'intuition directe des objets du raisonnement. De semblables raisonnements se font sur des phrases, non sur des