2. — Position classique du problème. — Corps éloignés. Système différentiel usuel.

2. — Position classique du problème. — Corps éloignés. Système différentiel usuel.

D'après Newton tout élément matériel, de masse dm, sollicité par une force totale $dm\,\mathbf{F}$, c'est-à-dire $\mathbf{F}$ par unité de masse, possède par là même une accélération (vectorielle, rapportée à des axes galiléens) $\mathbf{a} = \mathbf{F}$. Faisons la somme des équations

$$dm\,\mathbf{a} = dm\,\mathbf{F}$$

se rapportant aux différents éléments d'un corps C_h ($h = 0, 1$). D'après la définition de son centre de gravité P_h, le premier membre n'est que le produit de la masse m_h du corps C_h par l'accélération $\frac{d^2P_h}{dt^2}$ de P_h. Dans la somme des seconds membres, les forces intérieures disparaissent, et ce qui reste est la résultante $\mathbf{F_h}$ des forces extérieures au corps C_h, d'où les équations vectorielles

$$m_h \frac{d^2P_h}{dt^2} = \mathbf{F_h} \qquad (h = 0, 1)\ . \qquad (1)$$

Cette élimination rigoureuse des forces intérieures, provenant du principe de réaction, ne subsistera plus en Relativité, et il faudra se contenter de quelque remplacement approché.

Jusqu'ici on a fait intervenir:

a) la loi du mouvement ($\mathbf{a} = \mathbf{F}$);

b) le principe de réaction.

Il faut maintenant invoquer

c) la loi newtonienne de gravitation.

Elle permet d'expliciter les forces $\mathbf{F_h}$, et conduit à un système différentiel, intégrable par voie élémentaire, dès que les corps sont assez éloignés. On veut dire par ceci que, en désignant par D la plus grande dimension linéaire des corps C_h et par R la plus petite des distances entre un point de C_0 et un point de C_1, on suppose que, si non D/R,

d) $(D/R)^2$ soit tout à fait négligeable.

On démontre, d'après cela, dans la théorie du potentiel newtonien, que, r indiquant la distance $\overline{P_0P_1}$, f la constante de gravitation, et

$$U = f\frac{m_0 m_1}{r} \tag{2}$$

le potentiel (mutuel) des deux points matériels P_0 et P_1, la résultante des forces extérieures s'exerçant sur C_h n'est que

$$\mathbf{F_h} = \operatorname{grad}_h U \ , \tag{3}$$

le gradient avec l'indice h se rapportant au point P_h.

Les équations (1) prennent partant la forme

$$m_h \frac{d^2 P_h}{dt^2} = \operatorname{grad}_h U \qquad (h = 0{,}1) \ , \tag{4}$$

où les seconds membres ne dépendent que de la position des deux points P_0 et P_1. C'est, peut-on dire (on n'a qu'à projeter sur des axes fixes), le système différentiel classique, définissant le mouvement absolu dans le problème des deux corps. L'intégration du système remonte, elle aussi, à Newton. On passe au mouvement relatif, et on arrive aux formules résolutives à l'aide des intégrales des forces vives et des aires, etc. Il faudra s'en souvenir pour y rattacher enfin, comme des perturbations, les conséquences de la conception relativiste. Mais il y a encore beaucoup de chemin à franchir; et, pour le moment, il convient plutôt d'ajouter deux remarques suggérées par les équations (4). La première se rapporte à la possibilité (principe d'Hamilton) de remplacer, pour chaque point P_h, l'équation vectorielle (4) du mouvement par le principe variationnel

$$\delta \int \left(\frac{1}{2} v_h^2 + U_h\right) dt = 0 \ , \tag{5}$$

v_h désignant la valeur absolue de la vitesse du point P_h et U_h le potentiel unitaire agissant sur P_h, qui s'écrit, d'après (2),

$$U_h = \frac{1}{m_h} U = f\frac{m_{h+1}}{r} \qquad (h = 0{,}1) \ , \tag{6}$$

avec la convention évidente de regarder identiques les indices h de même parité.

Dans (5) la variation doit être effectuée entre des limites fixes, et peut être bornée aux coordonnées d'espace x_h^i ($i = 1, 2, 3$) du point P_h, ou, indifféremment, s'étendre aussi à t, puisque la contribution provenant de la variation de t s'annule identiquement, dès qu'on égale à zéro la variation provenant des coordonnées.

Il serait encore possible de réunir les deux formules variationnelles (5), correspondant à $h = 0$ et $h = 1$, dans une seule; mais ceci, qui est très important en Mécanique classique pour aboutir enfin à un système canonique unique, n'a pas d'intérêt ici, une simplification analogue n'étant pas à prévoir en Relativité.

Il importe au contraire, au point de vue spéculatif, de fixer un aspect limite de *d*). Tant que C_0 et C_1 sont des corps naturels, et par là même doués d'une certaine extension, *d*) est nécessairement une hypothèse approchée. Mais l'approximation est d'autant plus grande que le rapport D/R est petit. A la limite, pour le cas abstrait où les corps seraient réduits à de simples points matériels, la condition *d*) se trouve remplie automatiquement. Par conséquent la traduction du problème par les équations différentielles (4) devient *rigoureuse* pour le cas limite des points matériels.

Nous verrons bientôt qu'il n'en est pas de même en Relativité générale. Dans son cadre on arrive aussi à des équations différentielles ordinaires, ayant même degré d'approximation pour le cas réel des corps célestes, mais on ne peut plus passer à la limite, certains paramètres devenant infinis, pour des dimensions évanouissants des corps C, si leurs masses restent finies.

Le point matériel, cette pierre angulaire de la Mécanique classique, ne se laisse réaliser en Mécanique einsteinienne que pour des masses infiniment petites.

3. — Potentiel newtonien d'un corps en un point intérieur. Ordre de grandeur.

Avant d'aborder la mise en équation du problème des deux corps, dans les mêmes circonstances intuitives, mais au point