5. — Spécification des hypothèses permettant de SIMPLIFIER LE CALCUL. RÈGLE PRATIQUE.

Objekttyp: **Chapter**

Zeitschrift: **L'Enseignement Mathématique**

Band (Jahr): **34 (1935)**

Heft 1: **L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE**

PDF erstellt am: **16.07.2024**

5. — Spécification des hypothèses permettant de simplifier le calcul. Règle pratique.

L'application des généralités qui précèdent à un problème bien déterminé quelconque exige évidemment la combinaison des deux principes, gravitationnel et géodésique, qui se traduisent analytiquement dans l'intégration: d'équations aux dérivées partielles le premier, d'équations différentielles ordinaires le second; même le plus souvent enchevêtrées les unes aux autres.

Il y a un cas, qu'on peut appeler *problème du centre fixe* (un seul corps à structure complètement symétrique et une masse infiniment petite qui se meut dans son champ), où non seulement les équations gravitationnelles sont indépendantes des équations du mouvement mais où on a même pu les intégrer rigoureusement et résoudre ensuite le problème jusqu'au bout. C'est ce qui a réussi à Schwarzschild peu après que Einstein en eut donné une solution approchée.

En concept, le problème des deux, ou même d'un nombre quelconque de corps peut être envisagé comme un cas particulier de la mécanique (newtonienne ou einsteinienne que ce soit) d'un milieu continu, où l'on aurait affaire à une distribution de matière remplissant, avec des vides éventuels, tout l'espace, cette matière étant soumise à sa propre gravitation. A ce point de vue tout revient, d'après Einstein, à caractériser, en fonction de x^0, x^1, x^2, x^3, non seulement la métrique de l'espace-temps, c'est-à-dire les dix coefficients g_{ik} du ds^2, mais encore la congruence des lignes horaires, décrites par les différents éléments de matière (lignes de courant lorsqu'on considère séparément l'espace et le temps). Une congruence est définie analytiquement par les paramètres $\lambda^i(x^0, x^1, x^2, x^3)$ $(i = 0, 1, 2, 3)$, ou bien par les moments λ_i de ses lignes. Ces quatre nouvelles inconnues se réduisent d'ailleurs à trois, puisqu'elles sont liées aux g par l'identité

$$\sum_{i\,0}^{3} \lambda_i \lambda^i \equiv \sum_{ik\,0}^{3} g_{ik} \lambda^i \lambda^k \equiv \sum_{ik\,0}^{3} g^{ik} \lambda_i \lambda_k = 1 \; .$$

Si l'on introduit en outre la densité $\mu(x^0, x^1, x^2, x^3)$ de la distribution de la matière à un instant donné x^0, et la constante universelle c (vitesse de la lumière dans le vide), $\mu/c^2 = \varepsilon$ représentera, d'après la proportionnalité entre matière et énergie, la densité de l'énergie, et le tenseur énergétique aura les composantes

$$T_{ik} = \varepsilon \lambda_i \lambda_k \qquad (i, k = 0, 1, 2, 3) ,$$

en négligeant tout effort intérieur, c'est-à-dire en supposant que la matière est désagrégée. Ces T_{ik} sont les seconds membres des 10 équations gravitationnelles, qui renferment de la sorte 14 inconnues: les dix g, trois des λ et ε.

Pour que le problème devienne déterminé on n'a qu'à invoquer le principe géodésique, c'est-à-dire à associer aux 10 équations gravitationnelles les 4 équations

$$\sum_{0}^{3}{}_j \lambda_{i|j} \lambda^j = 0 \qquad (i = 0, 1, 2, 3)$$

($\lambda_{i|j}$ dérivées covariantes par rapport au ds^2), exprimant que toute ligne horaire est géodésique. Cette position du problème devrait être illustrée par beaucoup de remarques; mais je dois forcément glisser, en me bornant à avertir qu'un tel point de vue a été effectivement utilisé sous un aspect particulier, très important. Je fais allusion aux recherches concernant l'univers en expansion dynamique de Friedman — Lemaître — Einstein — Eddington — De Sitter — Tolman, etc., où tout est symétrique par rapport à un centre. Les variables indépendantes se réduisent alors à deux, et les équations aux dérivées partielles essentiellement à deux, avec autant d'inconnues [1]. Dans ces conditions, il a été possible, comme pour le cas Einstein-Schwarzschild, rappelé ci-dessus, d'intégrer rigoureusement.

---

1 Voir notamment, pour la position *mathématique* du problème général de l'Univers en expansion:

G. C. McVittie, The mass-particle in an expanding universe, *Monthly notices of the R. A. S.*, vol. 93, 1933, pp. 325-339;

J. L. Synge, On the expansion or contraction of a symmetrical cloud under the influence of gravity, *Proc. of the National Academy of Sciences*, vol. 20, 1934, pp. 635-640; et trois notes de M. C. Tolotti dans les *Rendiconti de l'Academie des Lincei*, vol. XXI, 1935, pp. 326-331, 488-492, 571-575.

Il ne me paraît pas probable qu'une chance pareille puisse se présenter aux mathématiciens de notre époque dans l'étude du véritable problème des deux corps ou de quelque aspect réel du problème de plusieurs corps. Faute de mieux, on ne peut que tâcher de se procurer en attendant des solutions suffisamment approchées pour bien fixer toutes les inégalités qui peuvent être, maintenant, ou dans quelques siècles, susceptibles de vérification par les observations. C'est ce qui a été fait, depuis une vingtaine d'années, par M. DROSTE [1], et, d'une manière plus détaillée, par le regretté DE SITTER [2] pour le cas des n corps, mais en négligeant systématiquement les potentiels intérieurs. Ceci est légitime — sans doute les auteurs cités ne l'ont pas ignoré, mais c'est M. MARCEL BRILLOUIN [3] qui l'a fait remarquer explicitement — tant qu'il s'agit de former le ds^2 et les équations du mouvement d'un corps *petit*, dans le champ de masses en mouvement donné; mais il n'en est plus de même lorsqu'il s'agit de caractériser le mouvement d'un système continu, même dans le cas typique de deux corps éloignés, de masses comparables. La raison essentielle en a été indiquée au nº 3, car c'est bien le potentiel newtonien qui joue un rôle prépondérant, aussi en tenant compte de la correction relativiste, comme on sait, et comme on va d'ailleurs le reconnaître dans nos formules.

Ayant en vue le problème des deux corps, il y aura lieu de reprendre, pour $n = 2$, la méthode approchée de DROSTE-DE SITTER [4], mais sans effacer *a priori* ce qui provient, pour chacun des deux corps, de ce corps lui-même; au contraire, en tâchant d'en saisir les conséquences irréductibles, et en même temps évitant les complications inessentielles à l'aide de quelques hypothèses qualitatives complémentaires, à côté de l'approximation principale, provenant de la petitesse des vitesses des

[1] The field of n moving centres in Einstein's theory of gravitation, *Ak. van Vet. te Amsterdam*, Vol. XIX, 1916, pp. 447-455.

[2] On Einstein's theory of gravitation and its astronomical consequences, *Monthly Notices of the R.A.S.*, Vol. LXVII, 1916, pp. 155-184.

[3] Gravitation einsteinienne. Statique. Points singuliers. Le point matériel, *Comptes rendus*, T. 175, 1922, pp. 1008-1012.

[4] Voir notamment J. CHAZY, *La théorie de la relativité et la mécanique céleste*, T. II (Paris, Gauthier-Villars, 1930), chap. X et XI.

corps célestes vis-à-vis de celle de la lumière, employée par EINSTEIN et par tous ses continuateurs.

Il importe évidemment de bien préciser les considérations préalables d'ordre de grandeur sous lesquelles nous allons aborder, simplifier et résoudre le problème.

En premier lieu, comme on l'a dit dès le début, on se contente d'arriver, dans les équations différentielles du mouvement, à la seconde approximation. Rappelons ce qu'on entend par ceci.

Dans les problèmes qui nous intéressent, l'ordre de grandeur des quantités mécaniques, notamment de l'énergie cinétique et potentielle, est celui de notre système planétaire. Pour les mouvements de ce système, v^2 (carré de la vitesse, c'est-à-dire double de l'énergie cinétique réduite à l'unité de masse) est très petit vis-à-vis de c^2, carré de la vitesse de la lumière, et il en est de même pour la valeur V du potentiel newtonien du système, soit à l'extérieur, soit même à l'intérieur du Soleil, des planètes, ou des satellites. L'ordre de grandeur des rapports

$$\beta^2 = \frac{v^2}{c^2}, \qquad \gamma = \frac{V}{c^2} \tag{13}$$

est 10^{-8} dans le cas de la Terre et pas trop différent pour les autres corps du système solaire.

On dira du *premier ordre* les termes ayant cet ordre de grandeur. Et la première source de simplification sera:

A_1) *Se contenter du premier ordre, en négligeant tout terme d'ordre supérieur.*

(Je choisis la lettre A dans cette spécification d'hypothèses, parce que A est l'initiale soit d'« approximation », soit d'« admission ».) Bien entendu il faudra, comme toujours dans ce type de réductions, procéder *cum grano salis.* On aura bien le droit, dans une formule quelconque, de négliger β^3, ou $\beta\gamma$, etc. devant l'unité; au contraire, si par hasard, dans une relation rigoureuse, il n'y a pas de termes d'ordre zéro (comparables à l'unité), mais que les termes prépondérants soient d'un certain ordre minimum ν, il faudra retenir, avec eux, tout ce qui ne dépasse pas l'ordre $\nu + 1$. L'advertance est bien banale, mais elle doit rester présente à l'esprit au cours des calculs.

D'autre part, dans le but de simplifier autant que possible, il est naturellement avantageux de se rapporter à des coordonnées appropriées. Dans les cas qui nous intéressent ici, le ds^2 reste très proche du ds_0^2 de la relativité restreinte (absence de matière et de toute autre circonstance physique influant sur la métrique de l'espace-temps). Un tel ds_0^2, rapporté au temps römerien x^0 ($= ct$, où t désigne le temps ordinaire) et à des coordonnées cartésiennes x^1, x^2, x^3, a la forme pseudo-euclidienne

$$ds_0^2 = dx^{0^2} - (dx^{1^2} + dx^{2^2} + dx^{3^2}) \, . \tag{14}$$

On doit donc admettre — ce n'est au fond qu'un aspect préliminaire de l'approximation A_1) — que les métriques (10) se rapportant aux questions susdites comportent des coordonnées x^0, x^1, x^2, x^3 (qui pourraient être mieux caractérisées sous l'aspect géométrique) très proches de l'espèce pseudo-cartésienne, dans ce sens que *les coefficients* g_{ik} *diffèrent des valeurs* $\overset{0}{g}_{ik}$ ($\pm$ 1 ou zéro) *correspondant à* (14) *par des quantités*

$$- 2\gamma_{ik}$$

du premier ordre au moins; les γ_{0i} *étant même d'ordre non inférieur à* 3/2.

Ce n'est pas encore assez pour aboutir enfin à un nombre fini d'équations différentielles ordinaires. Il en serait d'ailleurs de même dans la position classique du problème des deux corps, puisque chacun de leurs centres de gravité P_h ressent les attractions de tout élément de l'autre corps C_{h+1}, et on peut remplacer ces dernières par une force dépendant uniquement de la position de P_{h+1}, seulement en introduisant quelque hypothèse supplémentaire, notamment l'hypothèse *d*) du n° 2. Comme la Mécanique ordinaire n'est qu'un cas limite de la Mécanique einsteinienne, il est bien clair que, pour atteindre le même but, il faudra, aussi en Relativité générale, se poser (à fort peu près) dans les mêmes conditions, et par conséquent:

A_2) *Négliger toute quantité de l'ordre* $(D/R)^2$.

Les approximations A_1) et A_2) sont assurément le fondement du calcul; mais elles ne suffisent pas à elles seules pour atteindre le but. Je les ai complétées, en admettant au préalable deux autres circonstances, qui sont d'ailleurs des plus raisonnables au point de vue astronomique. Je suppose ultérieurement:

A_3) *Le mouvement de chacun des corps se réduit* grossièrement *à une translation.*

Voici le sens à attribuer à l'adverbe « grossièrement ». Partons de la définition de mouvement de translation d'un corps C_h. C'est un mouvement dans lequel les points du corps sont, à un instant quelconque, animés tous d'une même vitesse vectorielle, disons de la vitesse $\mathbf{v_h}$ du centre de gravité P_h. Pratiquement on pourra naturellement regarder comme translation tout mouvement pour lequel, vis-à-vis de v_h (longueur du vecteur $\mathbf{v}_h$), est négligeable la valeur absolue de la différence vectorielle $\Delta\mathbf{v}$ entre les vitesses au même instant de deux points quelconques de C_h; donc le rapport $\frac{|\Delta\mathbf{v}|}{v_h}$.

Nous ne prétendons pas que ce rapport soit négligeable par lui-même, comme on l'a supposé pour $(D/R)^2$ ou β^3, mais seulement qu'il ne dépasse jamais quelques centièmes (ordre de grandeur 10^{-2}), de manière que l'on puisse omettre, comme quantité d'ordre supérieur au premier, tout produit du type

$$\beta^2 \frac{|\Delta\mathbf{v}|}{v_h}, \qquad \gamma \frac{|\Delta\mathbf{v}|}{v_h}, \text{ etc.}$$

C'est bien ce qui arrive pour les planètes. D'abord leurs déformations sont négligeables, et elles se comportent par conséquent comme des corps rigides. A la vérité leur mouvement n'est pas purement translatoire; il se compose de translation et de rotation. Toutefois, pour un point quelconque du corps, la vitesse due à la rotation atteint seulement quelques centièmes de la vitesse commune de translation. Par exemple, dans le cas de la Terre, la vitesse due à la rotation (un tour par jour) a la valeur maximum d'un demi kilomètre par seconde; tandis que la vitesse de translation est 30 km./sec.; donc

$$\frac{|\Delta\mathbf{v}|}{v_h} \backsim 2 \cdot \frac{1}{60} = 0{,}03 .$$

C'est l'ordre de grandeur pour notre système planétaire.

Ceci posé, remarquons qu'un mouvement rigoureusement de translation est en particulier rigoureusement rigide; on prévoit partant qu'un mouvement peu différent d'une translation soit par là même peu différent d'un mouvement rigide. C'est ce qui arrive en effet, pourvu qu'on ajoute quelque petite spécification à la condition cinématique concernant $\frac{|\Delta \mathbf{v}|}{\varrho_h}$ $(h = 0,1)$. Il suffit, par exemple, en envisageant la vitesse $\mathbf{v}$ d'un point quelconque Q du corps C_h comme fonction de sa position initiale M et du temps t, de supposer convenablement limitées les dérivées du déplacement

$$Q - M = \int_0^t \mathbf{v}(M, t)\, dt$$

par rapport aux coordonnées de M. Il serait aisé de préciser, mais je ne puis pas m'arrêter sur ces détails. Il me faut au contraire épuiser les préliminaires en quelques mots, pour esquisser ensuite la solution du problème.

La dernière admission se rapporte aux centres de gravité P_0 et P_1, qui doivent être, *à fort peu près*, *centres de gravitation* des corps respectifs. Rappelons la définition de *centre de gravitation* et expliquons l'*à peu près*. On sait [1] — et on le reconnaît d'ailleurs immédiatement par la considération du maximum du potentiel intérieur $u_{h|Q}$ (n° 3) — qu'il existe au moins un point G_h où u_h atteint son maximum, et où par conséquent les dérivées de u_h s'annulent, et avec elles l'attraction exercée par le corps C_h sur le point G_h. Ce centre de gravitation G_h ne coïncide pas nécessairement avec le centre de gravité P_h. C'est ce qui arrive certainement si le corps C_h possède un centre de symétrie, mais en général il n'en est rien, et alors l'attraction newtonienne de C_h sur son centre de gravité P_h n'est pas nulle. Or il est très avantageux (je crois même indispensable pour notre but) de pouvoir calculer la correction einsteinienne comme si la dite attraction sur P_h était rigoureusement nulle. Et c'est justement pour cela qu'il convient d'introduire la quatrième et dernière admission:

[1] Voir une note de M. Fenici dans les *Rendicònti* de l'Académie des Lincei, Vol. XXI, 1935, pp. 493-498.

A_4) *Pour chacun des deux corps le centre de gravité* P_h *n'est pas trop éloigné du (ou d'un) centre de gravitation* G_h; plus précisément, la distance $P_h G_h$ est assez petite pour que, en P_h, l'attraction g_h du corps C_h (nulle rigoureusement en G_h) soit une fraction assez petite (ici encore quelques centièmes au plus) de l'attraction F_h exercée par l'autre corps.

Alors il est permis de négliger, comme étant d'ordre supérieur au premier, tout terme du type

$$\beta^2 \frac{g_h}{F_h}, \qquad \gamma \frac{g_h}{F_h}, \text{ etc.} \qquad (h = 0{,}1) .$$

Remarque. — Il n'est pas inutile d'avertir que, à cause de A_3), dans l'ordre d'approximation adopté, il suffit que A_4) soit vérifiée à l'instant initial. Elle reste alors automatiquement satisfaite pour $t > 0$. En effet, d'après A_3), nos corps se comportent sensiblement comme des solides, et alors, à la même échelle, P_h et G_h gardent à tout instant les mêmes positions relatives dans le corps respectif. Il s'en suit en particulier que le centre de gravité P_h est substantiel, c'est-à-dire affecte toujours la même particule matérielle.

Règle pratique. — En vue du calcul effectif, il y a lieu de retenir que, dans n'importe quelle relation, *l'évaluation des termes correctifs* (généralement d'ordre 1; ou, exceptionnellement, d'ordre $\nu + 1$, si par hasard l'ordre minimum est ν) *se fait comme si les corps* C_0, C_1 *étaient rigoureusement indéformables, animés, chacun pour son compte, de simple translation, et chacun exerçant une attraction nulle sur son centre de gravité.*

6. — Expression du ds^2 pour le champ de deux corps en mouvement donné — L'opérateur $\frac{d_h}{dx^0}$.

Il faut expliciter les coefficients g_{ik}, qui, comme on l'a rappelé au numéro précédent, sont nécessairement de la forme

$$g_{ik} = \overset{0}{g}_{ik} - 2\gamma_{ik} \qquad (15)$$