9. — Les équations différentielles du problème.

Objekttyp: **Chapter**

Zeitschrift: **L'Enseignement Mathématique**

Band (Jahr): **34 (1935)**

Heft 1: **L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE**

PDF erstellt am: **15.08.2024**

Nutzungsbedingungen
Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern.
Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden.
Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

Haftungsausschluss
Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

Ein Dienst der *ETH-Bibliothek*
ETH Zürich, Rämistrasse 101, 8092 Zürich, Schweiz, www.library.ethz.ch

http://www.e-periodica.ch

tendus, se représenter les masses définies par (29) (et désignées ensuite, elles aussi, par m_0, m_1, en supprimant l'astérisque) comme des constantes caractéristiques du problème, possédant chacune, seulement à peu près, la propriété intrinsèque que la mécanique classique attache à la notion de masse.

9. — Les équations différentielles du problème.

Par tout ce qui précède il est acquis que le mouvement des points P_h, centres de gravité des deux corps, est défini par les fonctions lagrangiennes respectives

$$\mathcal{L}_h = \mathfrak{N}_h + \Lambda_h = \frac{1}{2}\beta_h^2 + \gamma_h + \Lambda_h\,, \qquad (h = 0,\ 1)\ . \qquad \text{(I)}$$

De plus Λ_h, d'après (27) et (25′), s'écrit

$$\Lambda_h = \frac{1}{2}\mathfrak{N}_h^2 + \frac{2\,l_0 l_1 - l_{h+1}^2}{r^2} + \frac{l_{h+1}}{r}\left(\beta_h^2 + 2\,\beta_{h+1}^2 - 4\,\underline{\boldsymbol{\beta}}_{\mathbf{h}} \times \underline{\boldsymbol{\beta}}_{\mathbf{h+1}}\right) +$$
$$+ \frac{1}{2}\,l_{h+1}\,\frac{d_{h+1}^2\,r}{dx^{0\,2}}\,, \qquad \text{(II)}$$

étant posé, pour abréger,

$$\frac{fm_h}{c^2} = l_h\,, \qquad (30)$$

de sorte que les constantes l_0, l_1 sont des (petites) longueurs.

Il s'agirait évidemment d'expliciter les six équations

$$\frac{d}{dx^0}\frac{\partial \mathcal{L}_h}{\partial \beta_{h|i}} - \frac{\partial \mathcal{L}_h}{\partial x_h^i} = 0 \qquad (h = 0,\ 1\ ;\quad i = 1,\ 2,\ 3) \qquad \text{(III)}$$

définissant le mouvement (absolu) des deux corps, pour passer ensuite à leur intégration dûment illustrée au point de vue géométrique et astronomique. Mais il n'est pas possible de le faire dans le cadre de cette conférence. Je dois donc me borner à quelques indications de méthode et de résultats.

Je viens de dire que les équations (III) définissent le mouvement absolu des points P_0, P_1. Cet appellatif « absolu » doit être interprété d'après le n° 5, en se rapportant par la pensée aux préliminaires de l'admission A_1). On a introduit alors des variables $x^i (i = 0, 1, 2, 3)$ *très proches* d'un quadruple quasi-cartésien, ou de LORENTZ: exactement lorentzien serait impossible, puisque l'espace-temps n'est plus quasi-euclidien. Mouvement *absolu* est tout mouvement dans un tel espace (x^1, x^2, x^3), la variable temporelle étant x^0. Pour fixer les x^i, on peut toutefois partir d'un quadruple lorentzien *quelconque*. On profitera (comme en mécanique ordinaire) de cette indétermination préalable pour supposer que le centre de gravité G du système des deux corps soit *fixe*, bien entendu *en première approximation*, ce qui signifie que, si l'on introduit la vitesse absolue $\underline{\alpha}$ (vectorielle et römerienne) de G, moyennant la position

$$m\underline{\alpha} = m_0\underline{\beta}_0 + m_1\underline{\beta}_1 \, , \tag{31}$$

où

$$m = m_0 + m_1 \, , \tag{32}$$

la valeur absolue de $\underline{\alpha}$ est nulle en première approximation, et précisément de l'ordre de β^3. Il s'en suit que dans les Λ_h il est permis de négliger $\underline{\alpha}$ sans plus, c'èst-à-dire de retenir

$$m_0\underline{\beta}_0 + m_1\underline{\beta}_1 = 0 \, . \tag{33}$$

Comme dans l'exposé traditionnel du problème des deux corps, il convient d'envisager d'abord le mouvement *relatif*, en étudiant, comme fonction de x^0, les différences

$$x^i = x_1^i - x_0^i \, , \tag{34}$$

et leurs dérivées par rapport à x^0, qui sont les composantes du vecteur

$$\underline{\beta} = \underline{\beta}_1 - \underline{\beta}_0 \, , \tag{35}$$

vitesse (römerienne) de P_1 par rapport à P_0.

En introduisant aussi les rapports numériques

$$\frac{m_h}{m} = \lambda_h \qquad (h = 0, 1) \, , \tag{36}$$

on tire de (33) et (35)

$$\underline{\beta}_0 = -\lambda_1\underline{\beta} \, , \qquad \underline{\beta}_1 = \lambda_0\underline{\beta} \, , \tag{37}$$

ou, si l'on préfère, en une seule formule,

$$\underline{\beta}_h = (-1)^{h+1}\lambda_{h+1}\underline{\beta} \qquad (h = 0, -1) \, , \tag{37'}$$

ce qui permet de faire disparaître les vitesses absolues dans tout terme d'ordre supérieur. Bien entendu, il faut faire attention, lorsqu'il s'agit d'expressions telles que Λ_0, Λ_1 qu'on doit, pour expliciter les équations du mouvement, soumettre encore à la dérivation partielle. Evidemment, dans ces cas, les substitutions susdites peuvent être effectuées seulement *après* dérivation.

Une fois formées correctement les équations lagrangiennes provenant des $\mathcal{L}_h$, on en tire, par simple soustraction des formules homologues, les équations du mouvement relatif, contenant exclusivement les trois inconnues x^1, x^2, x^3 (et leurs dérivées). Ces équations — on peut le prévoir *a priori* et le confirmer par la simple inspection des (I) — sont bien celles de Newton avec force perturbatrice einsteinienne. L'analyse de cette dernière, en s'aidant d'une propriété remarquable d'équivalence mécanique, conduit à l'envisager comme une force centrale, qui produit l'*effet bien connu du déplacement du périhélie.* On peut espérer que l'expression quantitative de ce déplacement soit susceptible de vérification astronomique par les observations des étoiles doubles. Il s'agirait notamment de déceler la correction (vis-à-vis de la valeur einsteinienne) fournie par le calcul, lorsque la masse de la planète n'est plus négligeable par rapport à la masse du corps central.

Le résultat est, comme on le voit, très simple; les calculs sont élémentaires, mais exigent d'assez longs développements. Je me propose d'en rendre compte ailleurs. Ici je voudrais encore ajouter que, une fois intégrées les équations du mouvement relatif, on peut revenir à la vitesse absolue du centre de gravité G, qui est nulle seulement en première approximation, et dont il est bien intéressant de déterminer la seconde. On parvient de la sorte à reconnaître que le centre de gravité subit des petites fluctuations par rapport au repère des x^1, x^2, x^3, repère qui correspond à un trièdre galiléen de l'ancienne Mécanique. Ces fluctuations se laissent évaluer par de simples quadratures. De telles quadratures introduisent des termes séculaires, sur lesquels on devra surtout fixer l'attention en vue des chances de possible contrôle astronomique.