

# SUR LES DÉRIVÉES POLYDIMENTIONNELLES D'UNE FONCTION DE PLUSIEURS VARIABLES

Autor(en): **Cioranescu, N.**

Objektyp: **Article**

Zeitschrift: **L'Enseignement Mathématique**

Band (Jahr): **34 (1935)**

Heft 1: **L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE**

PDF erstellt am: **16.07.2024**

Persistenter Link: <https://doi.org/10.5169/seals-26609>

## **Nutzungsbedingungen**

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern.

Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden.

Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

## **Haftungsausschluss**

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

# SUR LES DÉRIVÉES POLYDIMENSIONNELLES D'UNE FONCTION DE PLUSIEURS VARIABLES

PAR

N. CIORANESCU (Bucarest).

---

1. — Il est évident que lorsqu'on veut étendre aux fonctions de plusieurs variables réelles la définition de la dérivée d'une fonction d'une seule variable, il faut considérer la limite du rapport  $\frac{f(M) - f(M')}{MM'}$  pour  $M' \rightarrow M$  suivant une direction arbitraire, ce qui conduit à la notion de dérivée (linéaire) suivant une direction donnée, les dérivées partielles apparaissant comme les composantes suivant des directions privilégiées<sup>1</sup>. Mais, avec ça, on n'a pas l'impression d'avoir épuisé toute la richesse de définitions que peut offrir une fonction de plusieurs variables. C'est M. K. BÖGEL<sup>2</sup> qui a montré comment il faut étendre aux fonctions de plusieurs variables la définition de la dérivée en introduisant les dérivées polydimensionnelles d'une fonction.

Nous allons exposer succinctement la théorie de M. Bögel, en modifiant légèrement sa notation. Sans insister sur les définitions et les conditions d'existence de dérivées polydimensionnelles, qui sont considérées en elles-mêmes dans les Mémoires de M. Bögel, nous supposerons dans la suite que les fonctions que nous considérons ont tant des dérivées partielles ordinaires qu'il est besoin de supposer, car nous avons surtout en vue une

---

<sup>1</sup> Nous avons montré quel parti on peut tirer de la considération systématique de dérivée suivant une direction arbitraire dans un article inséré dans *L'Enseign. mathém.*, XXX, p. 50.

<sup>2</sup> K. BOÖEL, Mehrdimensionale Differentiation von Funk. mehrerer reeller Veränderlichen, *Journal für die reine und angew. Mathem.*, B. 170, S. 197 et B. 173, S. 5.

généralisation très simple de la notion de dérivée polydimensionnelle de M. Bögel, qui est dans le même rapport avec cette dernière notion que la dérivée suivant une direction arbitraire avec les dérivées partielles ordinaires. On introduit ainsi certaines expressions différentielles linéaires qui comportent une définition intrinsèque.

2. — Soit  $M(x_1, x_2, \dots, x_n)$  un point de l'espace  $E_n$  à  $n$  dimensions rapporté à un système  $Ox_1 x_2 \dots x_n$  d'axes rectangulaires. Au point  $M$  considérons un  $n$ -èdre  $Mx_1 x_2 \dots x_n$  parallèle et de même sens que  $Ox_1 x_2 \dots x_n$  et désignons par :

$L^{(1)}(x_i)$  la variété linéaire à une dimension (droite) passant par  $M$  et  $// Ox_i$ ;

$L^{(2)}(x_i, x_k)$  la variété linéaire à deux dimensions (plan) passant par  $M$  et  $// Ox_i x_k$ ;

$L^{(k)}(x_{\alpha_1}, x_{\alpha_2}, \dots, x_{\alpha_k})$  la variété linéaire à  $k$  dimensions passant par  $M$  et appartenant au  $n$ -èdre  $Mx_1 x_2 \dots x_n$ .

De cette manière on attache au point  $M$  en tout :

$$\sum_1^n C_n^i = 2^n - 1$$

variétés linéaires, la dernière étant  $E_n$  lui-même.

Considérons la variété  $L^{(k)}(x_{\alpha_1}, x_{\alpha_2}, \dots, x_{\alpha_k})$  et soit  $M'(x'_{\alpha_1}, x'_{\alpha_2}, \dots, x'_{\alpha_k})$  un autre point de  $L^{(k)}$ , par conséquent les autres  $n - k$  coordonnées de  $M'$  étant celles de  $M$ . La totalité des points  $P(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n)$  situés dans  $L^{(k)}(x_{\alpha_1}, x_{\alpha_2}, \dots, x_{\alpha_k})$  et dont les coordonnées  $\xi_{\alpha_1}, \xi_{\alpha_2}, \dots, \xi_{\alpha_k}$  satisfont aux inégalités :

$$x_{\alpha_i} \leq \xi_{\alpha_i} \leq x'_{\alpha_i} \quad (i = 1, 2, \dots, k),$$

ou bien les inégalités inverses, déterminent ce qu'on appellera *un intervalle k-dimensionnel* dont  $M$  et  $M'$  sont les extrémités, et qui a en tout  $2^k$  sommets. Désignons cet intervalle par  $(M, M')_k$  et sa grandeur par :

$$\|MM'\| = (x'_{\alpha_1} - x_{\alpha_1})(x'_{\alpha_2} - x_{\alpha_2}) \dots (x'_{\alpha_k} - x_{\alpha_k})$$

avec son signe, qu'on regarde comme donnant l'orientation de  $(M, M')_k$ . Lorsque  $k = n$  on a l'intervalle  $(M, M')_n$  qui est non-dégénéré. Soit  $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$  ou  $f(M)$  une fonction de point douée de dérivées partielles jusqu'à un certain ordre ( $\leq n$ ) dans une certaine région  $R$  de  $E_n$ . La limite du rapport  $\frac{f(M) - f(M')}{\overline{MM'}}$  pour  $M' \rightarrow M$ , conduit lorsque  $M'$  appartient à  $L^{(1)}(x_k)$  à la dérivée partielle  $\frac{\partial f}{\partial x_k}$ . Montrons avec M. Bögel comment on peut attacher à  $f(M)$  une dérivée relative à un intervalle polydimensionnel.

Supposons pour cela que le point  $M'$  appartient à la variété  $L^{(k)}(x_{\alpha_1}, \dots, x_{\alpha_k})$ . Soient  $S_m^{(k)}$  ( $m = 1, 2, \dots, 2^k$ ) les sommets de l'intervalle  $(M, M')_k$ , les points  $M$  et  $M'$  étant aussi des points  $S_m^{(k)}$ . Considérons l'expression:

$$\Delta^{(k)} f(M) = \sum_{m=1}^{2^k} \varepsilon_m f(S_m^{(k)}), \quad (1)$$

où  $\varepsilon_m = \pm 1$  selon que le nombre d'arêtes qui séparent le sommet  $S_m^{(k)}$  du sommet  $M'$  pour une circulation déterminée le long des arêtes du polytope  $(M, M')_k$  est paire ou impaire.

$\Delta^{(k)} f(M)$  est une fonction additive d'intervalle, comme on voit facilement. La limite du rapport:

$$\frac{\Delta^{(k)} f(M)}{\|MM'\|} \quad \text{pour } M' \rightarrow M \quad (2)$$

tout en restant dans  $L^{(k)}(x_{\alpha_1}, \dots, x_{\alpha_k})$  est par définition, lorsqu'elle existe, la dérivée  $k$ -dimensionnelle de  $f(M)$  suivant  $L^{(k)}(x_{\alpha_1}, \dots, x_{\alpha_k})$ , et qu'on désignera par la notation:

$$\frac{\partial^k f(M)}{\partial L^{(k)}(x_{\alpha_1}, \dots, x_{\alpha_k})}. \quad (3)$$

Il y a en tout  $C_n^k$  dérivées  $k$ -dimensionnelles.

3. — Nous allons compléter les résultats de M. Bögel en remarquant que l'on peut étendre la notion de dérivée polydimensionnelle d'une fonction de plusieurs variables de la même

manière que la notion de dérivée partielle, en donnant des orientations arbitraires aux variétés linéaires  $L^{(k)}$  attachées à chaque point de  $E_n$ .

Pour cela attachons à chaque point  $M$  de  $E_n$  un  $n$ -èdre qui se déduit de  $Ox_1 x_2 \dots x_n$  par le déplacement euclidien le plus général, et non seulement par une translation comme dans le cas de M. Bögel. Soit  $MX_1 X_2 \dots X_n$  ce  $n$ -èdre et  $\mathcal{L}^{(k)}(x_{\alpha_1}, x_{\alpha_2}, \dots, x_{\alpha_k})$  la variété linéaire à  $k$  dimensions déterminée par  $MX_{\alpha_1}, MX_{\alpha_2}, \dots, MX_{\alpha_k}$ . Considérons le point  $M'$  de  $\mathcal{L}^{(k)}(x_{\alpha_1}, x_{\alpha_2}, \dots, x_{\alpha_k})$  et supposons qu'il n'appartient pas à une variété d'ordre inférieur; on peut attacher aux points  $M$  et  $M'$  l'intervalle orienté  $(M, M')_k$  ou si l'on veut un polytope  $k$ -dimensionnel qui est complètement déterminé si  $MX_1 X_2 \dots X_n$  est donné. Si l'on forme l'expression (2) pour cet intervalle, on définit ainsi une dérivée  $k$ -dimensionnelle orientée suivant une variété linéaire  $\mathcal{L}^{(k)}$  attachée à  $M$  et d'orientation quelconque, ou si l'on veut, une dérivée suivant plusieurs directions donc *poly-directionnelle*. Nous allons former ces expressions en supposant que  $f(M)$  admet des dérivées partielles (unidimensionnelles) jusqu'à l'ordre  $n$ , en insistant surtout sur les cas  $n = 2$  et  $n = 3$ .

4. — Lorsque  $n = 2$  la seule dérivée nouvelle qui s'introduit de cette manière est la dérivée superficielle orientée de  $f(x, y)$ , limite du rapport:

$$\frac{f(x', y') - f(x_1, y_1) - f(x_2, y_2) + f(x, y)}{\|MM'\|}, \quad (4)$$

où  $M(x, y)$ ,  $M_1(x_1, y_1)$ ,  $M_2(x_2, y_2)$ ,  $M'(x', y')$  sont les sommets d'un rectangle attaché à  $M$  et tel que  $(MM_1, Ox) = \varphi$ ,  $\varphi$  étant une certaine fonction donnée de  $M$ . Si l'on pose:  $\overline{MM_1} = h$ ,  $\overline{MM_2} = k$ . On a alors:

$$\begin{aligned} x' &= x + h \cos \varphi - k \sin \varphi ; & y' &= y + h \sin \varphi + k \cos \varphi ; \\ x_1 &= x + h \cos \varphi ; & y_1 &= y + h \sin \varphi \\ x_2 &= x - k \sin \varphi ; & y_2 &= y + k \sin \varphi ; & \|MM'\| &= hk . \end{aligned}$$

En introduisant ces expressions dans (4), on trouve en faisant usage de la formule de Taylor, que l'on a :

$$\begin{aligned} \lim_{hk \rightarrow 0} \frac{\Delta^{(2)} f(x, y)}{hk} &= \frac{\partial^2 f(x, y)}{\partial \mathcal{L}^{(k)}(x, y)} = \\ &= \frac{\partial^2 f(x, y)}{\partial x \partial y} \cos 2\varphi - \frac{1}{2} \left( \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \right) \sin 2\varphi. \end{aligned} \quad (5)$$

Dans le cas  $\varphi = 0$  ou  $\varphi = \pi$  considéré par M. Bögel cette dérivée se réduit à :  $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$ . On constate que cette expression peut être écrite symboliquement :

$$\frac{\partial^2 f(x, y)}{\partial \mathcal{L}^{(2)}(x, y)} = \left( \frac{\partial f}{\partial x} \cos \varphi + \frac{\partial f}{\partial y} \sin \varphi \right) \times \left( -\frac{\partial f}{\partial x} \sin \varphi + \frac{\partial f}{\partial y} \cos \varphi \right) \quad (5')$$

à condition de remplacer dans le produit symbolique du second membre  $\frac{\partial f}{\partial x} \cdot \frac{\partial f}{\partial y}$ , etc. par  $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$ , etc.,... Comme les dérivées de chaque parenthèse sont les dérivées de  $f(x, y)$  suivant les directions  $MM_1, MM_2$  on peut aussi écrire  $\frac{\partial^2 f(x, y)}{\partial \mathcal{L}^{(2)}(x, y)}$  sous les formes suivantes :

$$\frac{\partial^2 f(x, y)}{\partial \mathcal{L}^{(2)}(x, y)} = \frac{df(x, y)}{dl_\varphi} \times \frac{df(x, y)}{dl_{\varphi + \frac{\pi}{2}}}, \quad (5'')$$

$$\frac{\partial^2 f(x, y)}{\partial \mathcal{L}^{(2)}(x, y)} = \frac{d^*}{dl_\varphi} \left( \frac{df(x, y)}{dl_{\varphi + \frac{\pi}{2}}} \right) = \frac{d^*}{dl_{\varphi + \frac{\pi}{2}}} \left( \frac{df(x, y)}{dl_\varphi} \right); \quad (5''')$$

sous cette dernière expression à condition de considérer dans la seconde dérivation suivant  $l_\varphi$  ou  $l_{\varphi + \frac{\pi}{2}}$ ,  $\varphi$  comme indépendant de M.

De (5) on déduit facilement que si  $\frac{\partial^2 f(x, y)}{\partial \mathcal{L}^{(2)}(x, y)} = 0$  en chaque point M pour au moins deux rectangles distincts, alors  $f(x, y)$  est de la forme  $a(x^2 + y^2) + bx + cy + d$ .

5. — On peut généraliser encore plus ce résultat : attachons pour cela à chaque point M un parallélogramme  $MM_1M'M_2$  tel que :

$$\widehat{(MM_1, Ox)} = \varphi, \quad \widehat{(MM_2, Ox)} = \psi$$

et cherchons dans ce cas la limite de l'expression (4) lorsque  $M' \rightarrow M$ . On trouve facilement que cette limite, qu'on désignera par la notation  $\frac{\partial^2 f(x, y)}{\partial(x, y; \varphi, \psi)}$  est:

$$\frac{\partial^2 f(x, y)}{\partial(x, y; \varphi, \psi)} = \frac{1}{\sin(\psi - \varphi)} \left[ \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \sin(\varphi + \psi) + \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \cos \varphi \cos \psi + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \sin \varphi \sin \psi \right], \quad (6)$$

ou sous forme symbolique:

$$\frac{\partial^2 f(x, y)}{\partial(x, y; \varphi, \psi)} = \frac{1}{\sin(\psi - \varphi)} \frac{df}{dl_\varphi} \times \frac{df}{dl_\psi} = \frac{1}{\sin(\psi - \varphi)} \cdot \frac{d^*}{dl_\psi} \left( \frac{df}{dl_\varphi} \right) \quad (6')$$

avec la même convention du paragraphe précédent pour le symbole  $\frac{d^*}{dl_\psi}$ .

Si l'on pose:  $\text{tg } \varphi = a(x, y)$ ;  $\text{tg } \psi = b(x, y)$ , on déduit de (6) que:

$$\frac{\partial^2 f(x, y)}{\partial(x, y; \varphi, \psi)} = \frac{1}{b - a} \left[ \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + (a + b) \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} + ab \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \right], \quad (6'')$$

ce qui montre que les caractéristiques de l'équation différentielle linéaire aux dérivées partielles du second ordre:

$$\frac{\partial^2 f(x, y)}{\partial(x, y; \varphi, \psi)} = 0 \quad (7)$$

ont pour équations:

$$\frac{dy}{dx} = a(x, y); \quad \frac{dy}{dx} = b(x, y).$$

Inversement, le premier membre de toute équation différentielle linéaire aux dérivées partielles du second ordre à caractéristiques réelles et distinctes, peut être mis sous la forme (7), c'est-à-dire qu'on peut lui donner une définition directe.

6. — Si l'on passe aux fonctions de trois variables, les dérivées qui s'introduisent ainsi sont les dérivées superficielles et spatiales.

Soit  $WXYZ$  le trièdre attaché au point  $M$  et  $(\alpha, \beta, \gamma; \alpha', \beta', \gamma'; \alpha'', \beta'', \gamma'')$  ses cosinus directeurs par rapport à  $Oxyz$ . Construi-

sons sur ce trièdre un parallélépipède dont  $M'$  soit le sommet opposé à  $M$ . Cherchons la dérivée de la fonction  $f(x, y, z)$  suivant le rectangle  $MM_1M_2M_3$  du plan  $MX Y$ . Soient  $h, k, l$  les coordonnées de  $M'$  par rapport à  $MX Y Z$ . Alors :

$$M_1(x + \alpha h, y + \beta h, z + \gamma h), \quad M_3(x + \alpha' k, \dots), \\ M_2(x + \alpha h + \alpha' k, \dots)$$

et on trouve facilement que la limite de l'expression :

$$\frac{\Delta^{(2)} f(x, y, z)}{hk} = \frac{f(M_2) - f(M_1) - f(M_3) + f(M)}{hk} \quad (8)$$

pour  $h^2 k^2 \rightarrow 0$  est :

$$\frac{\partial^2 f(x, y, z)}{\partial \mathcal{L}^{(2)}(x, y)} = \alpha \alpha' \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \beta \beta' \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \gamma \gamma' \frac{\partial^2 f}{\partial z^2} + (\alpha \beta' + \alpha' \beta) \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} + \dots \quad (9)$$

ou d'une manière symbolique :

$$\frac{\partial^2 f(x, y, z)}{\partial \mathcal{L}^{(2)}(x, y)} = \left( \alpha \frac{\partial f}{\partial x} + \beta \frac{\partial f}{\partial y} + \gamma \frac{\partial f}{\partial z} \right) \times \left( \alpha' \frac{\partial f}{\partial x} + \beta' \frac{\partial f}{\partial y} + \gamma' \frac{\partial f}{\partial z} \right) \\ = \frac{df}{dl_x} \times \frac{df}{dl_y} = \frac{d^*}{dl_y} \left( \frac{df}{dl_x} \right) \quad (9')$$

De la même manière on trouve les expressions des deux autres dérivées superficielles :

$$\frac{\partial^2 f(x, y, z)}{\partial \mathcal{L}^{(2)}(y, z)} \quad \text{et} \quad \frac{\partial^2 f(x, y, z)}{\partial \mathcal{L}^{(2)}(z, x)}$$

Pour trouver l'expression de la *dérivée spatiale* de  $f(x, y, z)$  suivant le parallélépipède  $MM_1M_2M_3M_4M'M_5M_6$ , c'est-à-dire relative à l'intervalle  $(M, M')_3$  défini par  $M'$  et le trièdre  $MX Y Z$ , écrivons l'expression :

$$\frac{\Delta^{(3)} f(M)}{hkl}$$

sous la forme suivante :

$$\frac{\Delta^{(3)} f(M)}{hkl} = \frac{1}{l} \left[ \frac{\Delta^{(2)} f(M')}{hk} - \frac{\Delta^{(2)} f(M)}{hk} \right], \quad (10)$$



$\Delta_1^{(2)}f(M)$  étant l'expression (8) relative à la face MXY et  $\Delta_2^{(2)}f(M')$  étant une expression analogue relative à la face parallèle.

Comme la limite est indépendante, lorsqu'elle existe, de la manière dont  $h, k, l \rightarrow 0$ , faisons d'abord  $hk \rightarrow 0$ . Comme, d'autre part :

$$\lim_{hk \rightarrow 0} \frac{\Delta_2^{(2)}f(M')}{hk} = \frac{\partial^2 f(M_5)}{\partial \mathcal{L}^2(x, y)}$$

$$\lim_{hkl \rightarrow 0} \frac{\Delta_1^{(2)}f(M)}{hk} = \frac{\partial^2 f(M)}{\partial \mathcal{L}^{(2)}(x, y)}$$

$M_5$  étant le sommet situé sur MZ du parallélépipède, il en résulte que :

$$\lim_{hkl \rightarrow 0} \frac{\Delta^{(3)}f(M)}{hkl} = \frac{d^*}{dl_z} \left( \frac{\partial^2 f(M)}{\partial \mathcal{L}^{(2)}(x, y)} \right) = \frac{d^*}{dl_z} \left[ \frac{d^*}{dl_y} \left( \frac{df(M)}{dl_x} \right) \right] \quad (11)$$

ou sous l'autre forme symbolique :

$$\frac{\partial^3 f(x, y, z)}{\partial \mathcal{L}^{(3)}(x, y, z)} = \left( \alpha \frac{\partial f}{\partial x} + \beta \frac{\partial f}{\partial y} + \gamma \frac{\partial f}{\partial z} \right) \times$$

$$\times \left( \alpha' \frac{\partial f}{\partial x} + \beta' \frac{\partial f}{\partial y} + \gamma' \frac{\partial f}{\partial z} \right) \times \left( \alpha'' \frac{\partial f}{\partial x} + \beta'' \frac{\partial f}{\partial y} + \gamma'' \frac{\partial f}{\partial z} \right). \quad (11')$$

Dès lors, il est facile d'écrire dans le cas général l'expression de

$$\frac{\partial^{(k)} f(M)}{\partial \mathcal{L}^{(k)}(x_{a_1}, \dots, x_{a_k})}$$

pour une fonction ayant des dérivées partielles des  $k$  premiers ordres, en décomposant au besoin l'expression de  $\Delta^{(k)}f(M)$  qui contiennent  $2^k$  termes en deux expressions contenant chacune  $2^{k-1}$  termes, et procédant comme plus haut. On peut, par conséquent, écrire :

$$\frac{\partial^{(k)} f(M)}{\partial \mathcal{L}^{(k)}(x_{a_1}, \dots, x_{a_k})} = \frac{d^*}{dl_{x_{a_k}}} \left( \frac{d^*}{dl_{x_{a_{k-1}}}} \dots \left( \frac{df(M)}{dl_{x_{a_1}}} \right) \dots \right),$$

en regardant dans les dérivations successives les divers cosinus directeurs comme indépendants de M.

Nous n'insistons pas ici sur les conséquences qu'on peut tirer relativement aux équations aux dérivées partielles à caractéristiques réelles.