4. — Unicité de la variété de recouvrement universelle.

Objekttyp: **Chapter**

Zeitschrift: **L'Enseignement Mathématique**

Band (Jahr): **34 (1935)**

Heft 1: **L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE**

PDF erstellt am: **16.07.2024**

simplement connexe d'un caractère spécial. Le caractère spécial consiste en ce que les points étaient des classes de chemins. Puisque nous avons démontré maintenant l'existence de la variété, nous pouvons nous débarrasser de son caractère spécial

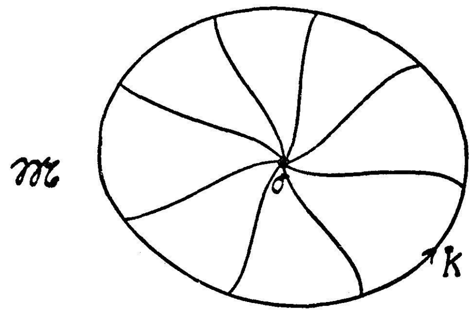

Fig. 6.

et nous entendrons dorénavant par $\hat{\mathfrak{M}}$ de nouveau une variété abstraite. Il est en outre permis dans tous les cas de se figurer cette variété de recouvrement comme une variété ponctuelle qui est au-dessus de $\mathfrak{M}$.

4. — Unicité de la variété de recouvrement universelle.

La démonstration d'unicité de la variété de recouvrement universelle se fait alors de la manière suivante:

Considérons deux variétés de recouvrement simplement connexes $\hat{\mathfrak{M}}$ et $\hat{\mathfrak{M}}'$ de $\mathfrak{M}$. Soit encore une fois O un point fixe de $\mathfrak{M}$, $\bar{\mathrm{O}}$ resp. $\bar{\mathrm{O}}'$ un point quelconque sur $\hat{\mathfrak{M}}$ resp. sur $\hat{\mathfrak{M}}'$, situés tous deux au-dessus de O. Nous allons construire une représentation de $\hat{\mathfrak{M}}$ sur $\hat{\mathfrak{M}}'$.

Soit $\bar{\mathrm{P}}$ un point quelconque de $\hat{\mathfrak{M}}$. Nous menons un chemin $\bar{\mathrm{O}}\,\bar{\mathrm{P}} = \bar{u}$ (fig. 7), nous le calquons en un chemin $\mathrm{OP} = u$ sur $\mathfrak{M}$ et nous recalquons ce dernier en un chemin $\bar{\mathrm{O}}'\bar{\mathrm{P}}' = \bar{u}'$ de $\hat{\mathfrak{M}}'$. Ce procédé est possible, puisque la représentation G de $\hat{\mathfrak{M}}'$ sur $\hat{\mathfrak{M}}$ est localement topologique; nous renonçons ici à la démonstration rigoureuse.

Nous avons abouti ainsi à un point $\bar{\mathrm{P}}'$ bien déterminé, qui sera l'image de $\bar{\mathrm{P}}$. Ce point est indépendant du chemin $\bar{u}$ choisi. Car, $\hat{\mathfrak{M}}$ étant *simplement connexe*, deux chemins $\bar{u}$ et

$\bar{v}$ partant de $\bar{O}$ et aboutissant à $\bar{P}$ peuvent être déformés l'un dans l'autre en maintenant $\bar{O}$ et $\bar{P}$ fixes. Il en est donc de même de u et v sur $\mathfrak{M}$, et cette dernière déformation peut être calquée de $\mathfrak{M}$ sur $\hat{\mathfrak{M}}'$; u' et v' aboutissent donc au même point $\bar{P}'$.

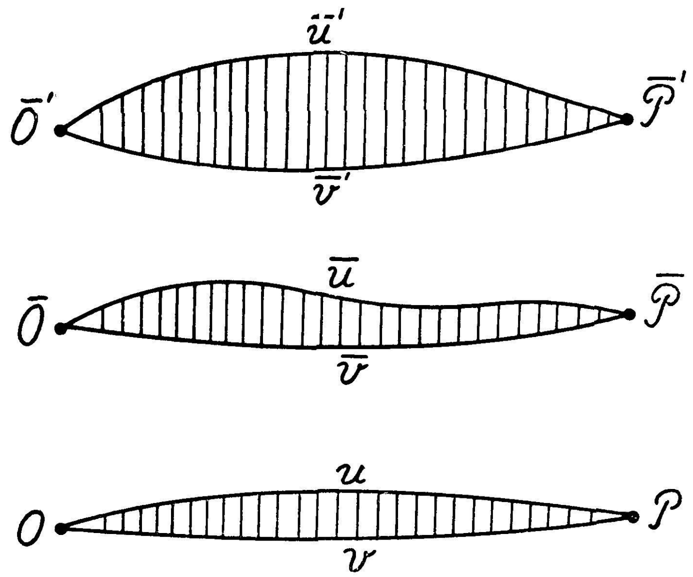

Fig. 7.

Puisque $\hat{\mathfrak{M}}'$ est simplement connexe, la représentation $\bar{P} \rightarrow \bar{P}'$ possède une inverse univoque et continue; la relation entre $\hat{\mathfrak{M}}$ et $\hat{\mathfrak{M}}'$ est donc topologique. Deux points correspondants $\bar{P}$ et $\bar{P}'$ étant situées au-dessus du même point fondamental P, nous pouvons considérer $\hat{\mathfrak{M}}$ et $\hat{\mathfrak{M}}'$ comme une même variété de recouvrement, conformément à la définition de la variété de recouvrement.

Le théorème d'existence et d'unicité de la variété universelle de recouvrement est donc complètement démontré.

Si nous considérons $\hat{\mathfrak{M}}'$ et $\hat{\mathfrak{M}}$ comme confondus, la démonstration montre en même temps qu'il existe une représentation topologique F de la variété $\hat{\mathfrak{M}}$ sur elle-même, transformant un point $\bar{O}$ au-dessus de O en un autre point quelconque $\bar{O}'$, lui aussi au-dessus de O. Une transformation de ce genre est dite une t r a n s f o r m a t i o n d e $\hat{\mathfrak{M}}$ e n s o i. Les transformations de $\hat{\mathfrak{M}}$ en soi forment un groupe dont l'ordre est égal au nombre de feuillets du recouvrement (qui d'ailleurs peut être infini); c'est le groupe de superpositions de $\hat{\mathfrak{M}}$ (Deckbewegungsgruppe). Nous retrouvons $\mathfrak{M}$ à partir de $\hat{\mathfrak{M}}$ en identifiant les points équivalents par rapport à ce groupe.

Par exemple, le recouvrement universel du tore est le plan euclidien, car celui-ci est simplement connexe, et les transformations du plan euclidien en soi sont les translations conservant le réseau quadratique. Le domaine de discontinuité de ce groupe de superpositions est un carré dont les côtés opposés sont équivalents; en les indentifiant on a la surface fermée du tore.

Soit dit en passant, le groupe de superpositions de $\hat{\mathfrak{M}}$ est toujours isomorphe au groupe fondamental de $\mathfrak{M}$, on pourra donc sans autre introduire le groupe fondamental comme groupe de superpositions de la variété de recouvrement universelle.

Ce n'est pas en vain que nous avons insisté avec tant d'énergie sur le théorème d'existence et d'unicité. Nous en ferons des applications importantes à trois des plus beaux problèmes mathématiques: la classification des surfaces de Riemann, des formes spatiales et des groupes continus.

5. — Les surfaces de Riemann et le théorème d'uniformisation.

En théorie des fonctions il s'agit de surfaces de Riemann[1]. Une surface de Riemann y est définie comme une variété à deux dimensions portant une métrique angulaire; la représentation conforme de deux surfaces de Riemann a donc un sens bien déterminé. Pour être plus précis, il faudra donc ajouter aux trois axiomes de la variété du § 1 la condition de conformité:

Un voisinage de tout point P *est rapporté à une variable complexe qui est appelée uniformisante locale. C'est-à-dire, le voisinage est représenté sur une partie du plan complexe. Soient* Q *un point du voisinage* $\mathfrak{V}(P)$, t_P *et* t_Q *des uniformisantes locales en* P *et* Q; t_Q *devra être une fonction analytique de* t_P.

Il est permis de parler de fonctions analytiques sur une surface de Riemann de ce type. Il est également possible de représenter

[1] H. Weyl, *Die Idee der Riemannschen Fläche* (Leipzig, 1923).