6. — Problème des formes spatiales

Riemann dans le sens expliqué plus haut[1]. Mais on a besoin d'une démonstration spéciale pour être sûr que toute surface de recouvrement est une surface de Riemann elle-même, engendrée par une fonction analytique.

6. — Problème des formes spatiales.

Les formes spatiales de deux et de plusieurs dimensions sont en rapport immédiat avec les surfaces de Riemann. Une forme spatiale est une variété à n dimensions munie d'une métrique de Riemann, qui dans le voisinage de tout point est congruente à celle d'un espace ou bien sphérique ou euclidien ou hyperbolique. On distinguera donc les différents cas des *formes spatiales sphériques*, *euclidiennes et hyperboliques.*

Nous avons de nouveau le théorème: Une variété de recouvrement d'une forme spatiale est encore une forme spatiale, puisqu'il est possible de calquer la métrique de la variété fondamentale sur la variété de recouvrement.

Il suffira donc d'étudier les deux points suivants pour trouver toutes les formes spatiales:

I° *Les formes spatiales simplement connexes,*

II° *Leurs groupes discontinus de transformations congruentes sans point fixe.* Nous appellerons ces groupes aussi les groupes discontinus de mouvements [2].

La première question qui est l'analogue du problème d'uniformisation est résolue par le théorème de H. Hopf [3] qui dit: Il n'existe pour toutes les dimensions que trois formes spatiales simplement connexes, à savoir: l'espace sphérique, l'espace euclidien, l'espace hyperbolique. La démonstration de ce théorème ne présente pas autant de difficultés que celle du théorème d'uniformisation. Faisons l'hypothèse, qui sera réduite à l'absurde, qu'il existe deux formes spatiales $\mathfrak{M}_1$ et $\mathfrak{M}_2$ euclidiennes, simplement connexes. Nous menons à partir d'un point O_1 de $\mathfrak{M}_1$ toutes les lignes géodésiques possibles et nous

---

[1] H. Weyl, *loc. cit.*

[2] D'après M. E. Cartan ce sont les groupes d'holonomie; c. f. E. Cartan, *La géométrie des espaces de Riemann.* Paris, 1928, p. 72.

[3] H. Hopf, Zum Clifford-Kleinschen Raumproblem. *Math. Ann.*, 95 (1925), p. 313-339.

faisons de même pour un point O_2 de $\mathfrak{M}_2$. Nous construisons une représentation de $\mathfrak{M}_1$ sur $\mathfrak{M}_2$ en représentant O_1 sur O_2 et les lignes géodésiques sur les lignes géodésiques. On peut démontrer que cette représentation est congruente.

Quant aux groupes discontinus de mouvements des formes spatiales simplement connexes dont les autres formes spatiales sont les domaines de discontinuité, nous n'avons de résultats complets que pour les espaces à deux et à trois dimensions. Pour les formes à trois dimensions on connaît à fond les formes spatiales sphériques et euclidiennes [1], alors que nous n'avons que des exemples de formes hyperboliques [2].

C'est la notion de surface de Riemann qui a posé le problème des formes spatiales: il suffit d'exiger de la représentation conforme du voisinage d'un point qu'elle soit en plus congruente. Mais le rôle profond du problème de formes spatiales ne repose pas sur cette relation avec la théorie des fonctions; au contraire, il est en relation avec le problème cosmologique de l'espace; on peut en effet se demander à quel type de variété l'espace de notre intuition et de la physique appartient ? Le rôle privilégié qu'a joué la métrique sphérique, euclidienne et hyperbolique et qui d'ailleurs paraissait arbitraire se voit éclairé du même coup. Car ces trois variétés sont justement les seules variétés simplement connexes où l'on puisse faire de la géométrie au sens ordinaire, c'est-à-dire les seules variétés qui admettent un groupe continu de transformations topologiques respectant les conditions de mobilité de Lie-Helmholtz.

7. — Variétés-groupes.

Une variété à n dimensions $\mathfrak{M}$ est dite *groupe continu* lorsque, à chaque couple de points A et B donnés dans cet ordre

---

[1] H. Hopf, Zum Clifford-Kleinschen Raumproblem, *l. c.*

W. Threlfall u. H. Seifert, Topologische Untersuchung der Discontinuitätsbereiche endlicher Bewegungsgruppen des dreidimensionalen sphärischen Raumes. I. *Math. Ann.*, 104 (1930), p. 1-70; II. *Math. Ann.*, 107 (1932), p. 543-586.

W. Hantzsche u. H. Wendt, Dreidimensionale euklidische Raumformen. *Math. Ann.*, 110 (1934), p. 593-611.

W. Nowacki, Die dreidimensionalen geschlossenen und offenen euklidischen Raumformen. *Comm. Math. Helv.*, vol. 7, 1934, p. 81.

[2] C. Weber u. H. Seifert, Die beiden Dodekaederräume, *Math. Ztschr.*, 37 (1933), p. 238-253.

F. Loebell, Beispiele geschlossener dreidimensionaler Clifford-Kleinschen Räume negativer Krümmung. *Ber. Sächs. Akad. Wiss.*, 83 (1931).