7. — Variétés-groupes.

Objekttyp: **Chapter**

Zeitschrift: **L'Enseignement Mathématique**

Band (Jahr): **34 (1935)**

Heft 1: **L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE**

PDF erstellt am: **16.07.2024**

faisons de même pour un point O_2 de $\mathfrak{M}_2$. Nous construisons une représentation de $\mathfrak{M}_1$ sur $\mathfrak{M}_2$ en représentant O_1 sur O_2 et les lignes géodésiques sur les lignes géodésiques. On peut démontrer que cette représentation est congruente.

Quant aux groupes discontinus de mouvements des formes spatiales simplement connexes dont les autres formes spatiales sont les domaines de discontinuité, nous n'avons de résultats complets que pour les espaces à deux et à trois dimensions. Pour les formes à trois dimensions on connaît à fond les formes spatiales sphériques et euclidiennes [1], alors que nous n'avons que des exemples de formes hyperboliques [2].

C'est la notion de surface de Riemann qui a posé le problème des formes spatiales: il suffit d'exiger de la représentation conforme du voisinage d'un point qu'elle soit en plus congruente. Mais le rôle profond du problème de formes spatiales ne repose pas sur cette relation avec la théorie des fonctions; au contraire, il est en relation avec le problème cosmologique de l'espace; on peut en effet se demander à quel type de variété l'espace de notre intuition et de la physique appartient ? Le rôle privilégié qu'a joué la métrique sphérique, euclidienne et hyperbolique et qui d'ailleurs paraissait arbitraire se voit éclairé du même coup. Car ces trois variétés sont justement les seules variétés simplement connexes où l'on puisse faire de la géométrie au sens ordinaire, c'est-à-dire les seules variétés qui admettent un groupe continu de transformations topologiques respectant les conditions de mobilité de Lie-Helmholtz.

7. — Variétés-groupes.

Une variété à n dimensions $\mathfrak{M}$ est dite *groupe continu* lorsque, à chaque couple de points A et B donnés dans cet ordre

[1] H. Hopf, Zum Clifford-Kleinschen Raumproblem, *l. c.*

W. Threlfall u. H. Seifert, Topologische Untersuchung der Discontinuitätsbereiche endlicher Bewegungsgruppen des dreidimensionalen sphärischen Raumes. I. *Math. Ann.*, 104 (1930), p. 1-70; II. *Math. Ann.*, 107 (1932), p. 543-586.

W. Hantzsche u. H. Wendt, Dreidimensionale euklidische Raumformen. *Math. Ann.*, 110 (1934), p. 593-611.

W. Nowacki, Die dreidimensionalen geschlossenen und offenen euklidischen Raumformen. *Comm. Math. Helv.*, vol. 7, 1934, p. 81.

[2] C. Weber u. H. Seifert, Die beiden Dodekaederräume, *Math. Ztschr.*, 37 (1933), p. 238-253.

F. Loebell, Beispiele geschlossener dreidimensionaler Clifford-Kleinschen Räume negativer Krümmung. *Ber. Sächs. Akad. Wiss.*, 83 (1931).

correspond un troisième point C, le *produit* de A et B. Nous écrirons

$$C = AB .$$

Cette multiplication doit satisfaire aux axiomes ordinaires du groupe, c'est-à-dire à l'unicité, l'associativité, l'existence de l'élément unité et de l'élément inverse. Cette liaison devra être de plus continue, c'est-à-dire que C variera d'une manière continue, s'il en est de même de A et B, et si A varie d'une manière continue, il en sera de même de A^{-1}. Le groupe est dit *d'ordre n* si la variété est à n dimensions.

Les rotations rigides de l'espace euclidien autour d'un point O sont un exemple d'un groupe continu. Une rotation est ici déterminée par un axe orienté, c'est-à-dire par un rayon issu de O, et par un angle de rotation φ, variant de 0 à π. Si nous portons sur le rayon le segment $OP = \varphi$ nous représentons par là les rotations autour de O biunivoquement sur les points de la sphère massive de rayon π. La biunivocité ne fait défaut que pour les points frontières de cette sphère: Comme à des points frontières diamétralement opposés correspondent des rotations d'angle π autour du même axe de sens opposé, il faudra, puisque ces deux rotations sont confondues, identifier ces deux points frontières, pour obtenir la variété-groupe $\mathfrak{M}$. Ce procédé d'identification bien connu nous conduit à l'espace projectif [1]. Le groupe continu se présente ici comme l'espace projectif $\mathfrak{P}$.

Il est d'ailleurs possible de considérer le groupe continu comme un groupe de transformations de notre variété-groupe. A cet effet nous faisons correspondre à A la transformation

$$X \rightarrow XA ,$$

X étant un point variable. Ceci est une correspondance biunivoque. Car tout point Y est l'image bien déterminée d'un point, à savoir du point YA^{-1}. Cette représentation est de plus sans points fixes, pourvu que A ne coïncide pas avec l'élément unité du groupe. Car de $X = XA$ nous tirons $A = E$. Le groupe de transformations ainsi défini est holoédriquement isomorphe au groupe donné $\mathfrak{M}$. Cette interprétation du groupe est analogue

[1] On trouve la démonstration p. 54 du cours de Topologie cité plus haut (p. 233).

à la représentation bien connue, dite régulière, d'un groupe d'ordre fini r par un groupe de permutations de r indices; les permutations de la représentation régulière sont, comme on le sait bien, les lignes ou les colonnes du « carré de Cayley » du groupe. La seule différence est qu'il s'agit ici d'un groupe dont les éléments forment un ensemble continu.

Il existe des variétés qui ne sont pas des variétés-groupes. Il est facile de voir que les variétés non orientables nous en donnent un exemple. Car, soit w un chemin fermé partant du point unité E de la variété-groupe et $\mathfrak{S}$ une petite sphère de centre E, nous pourrons faire varier $\mathfrak{S}$ le long de w en y appliquant les transformations correspondant aux points de w. De retour à notre point de départ, la transformation redevient l'identité; l'orientation de $\mathfrak{S}$ ne s'est donc pas renversée pendant le parcours de la sphère $\mathfrak{S}$. Deuxièmement, le groupe continu ne possédant pas de points fixes, la variété doit admettre des représentations en soi sans points fixes, voisines de l'identité. C'est pour cette raison que la sphère à deux dimensions ne peut être une variété-groupe. Une troisième condition nécessaire est que le groupe fondamental d'une variété-groupe soit abélien. En effet, soient a et b deux chemins fermés partant du point E; si nous effectuons

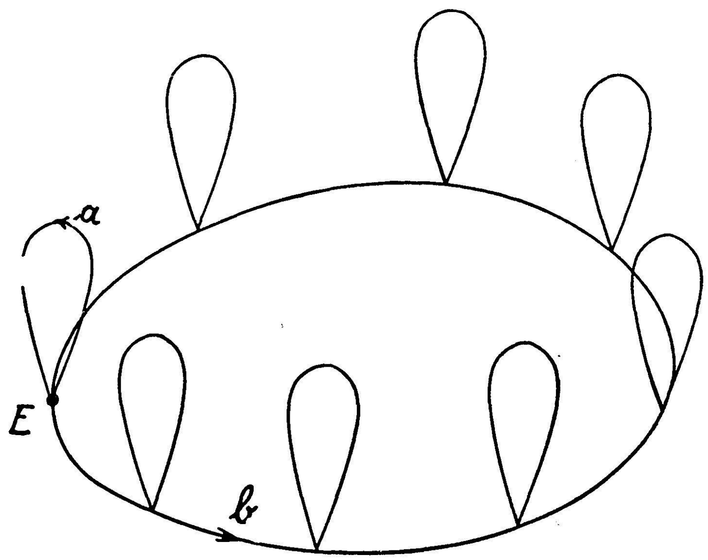

Fig. 8.

alors sur a la suite des transformations correspondant à tous les points de b, la courbe a revient à sa position primitive, puisque la transformation revient à l'identité. Le chemin a peut donc être déformé dans le chemin bab^{-1}. Mais ceci signifie que les classes de chemins représentées par a et b sont permutables (fig. 8). Donc, parmi les surfaces fermées à deux dimensions le tore orientable entre seul en ligne de compte comme variété-groupe.

8. — Groupes de recouvrement.

Nous allons appliquer aux groupes continus la notion de recouvrement et montrerons que toute variété de recouvrement $\hat{\mathfrak{M}}$ d'un groupe continu $\mathfrak{M}$ est encore un groupe continu $\hat{\mathfrak{M}}$. Il est nécessaire pour la démonstration de définir le produit de deux points $\bar{A}$ et $\bar{B}$ de $\hat{\mathfrak{M}}$, ce que nous ferons de la manière suivante: Nous choisissons un point $\bar{E}$ au-dessus de E et relions $\bar{E}$ à $\bar{A}$ par un chemin $\bar{a}$. Soit a le chemin obtenu en calquant $\bar{a}$ sur $\mathfrak{M}$ et soit A son point final. Au-dessous de $\bar{B}$ se trouve un point B. La transformation $X \to XB$ qui lui correspond transforme le chemin a en un chemin a' qui conduit de B à AB (fig. 9).

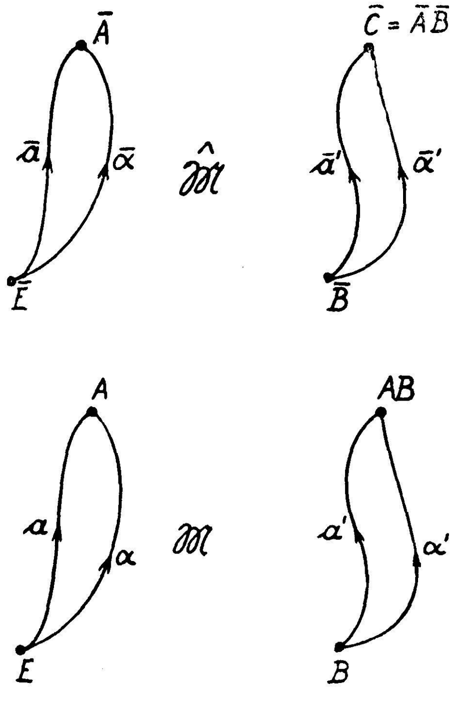

Fig. 9.

Soit $\bar{a}'$ le chemin au-dessus de a' et partant du point $\bar{B}$. C'est son point final que nous appellerons le produit $\bar{C} = \bar{A}\bar{B}$. Cette