9. — Groupes à deux paramètres.

Objekttyp: **Chapter**

Zeitschrift: **L'Enseignement Mathématique**

Band (Jahr): **34 (1935)**

Heft 1: **L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE**

PDF erstellt am: **16.07.2024**

9. — Groupes à deux paramètres.

Appliquons maintenant notre procédé de construction aux groupes d'ordre 2 [1]. Un groupe d'ordre 2 est engendré par deux transformations infinitésimales **u** et **v**. D'après le deuxième théorème principal, il existe une relation de la forme

$$\mathbf{u} \times \mathbf{v} = \alpha \mathbf{u} + \beta \mathbf{v} ;$$

α et β sont les constantes de structure que nous venons de désigner par c_{ik}^{l} dans le cas des groupes d'ordre n. On peut satisfaire dans ce cas simple aux deux conditions de l'anneau infinitésimal pour t o u t couple α, β. Il suffit de poser $\mathbf{v} \times \mathbf{u} = - \alpha \mathbf{u} - \beta \mathbf{v}$, et l'identité de Jacobi est satisfaite d'elle-même.

De combien de manières essentiellement différentes peut-on choisir α et β ? Nous verrons qu'il n'y en aura que deux.

I^er^ cas: Les deux coefficients sont nuls: $\alpha = \beta = 0$.

On a alors

$$\mathbf{u} \times \mathbf{v} = 0 . \tag{I}$$

II^me^ cas: Un coefficient au moins, disons α, est différent de 0. Il est alors possible d'introduire de nouveaux vecteurs fondamentaux

$$\mathbf{u}' = \alpha \mathbf{u} + \beta \mathbf{v} , \qquad \mathbf{v}' = \frac{\mathbf{v}}{\alpha} .$$

En les introduisant dans la relation de définition de l'anneau infinitésimal, il vient

$$\mathbf{u}' \times \mathbf{v}' = \mathbf{u} \times \mathbf{v} = \alpha \mathbf{u} + \beta \mathbf{v} = \mathbf{u}' \tag{II}$$

(I) et (II) sont donc les seuls anneaux infinitésimaux essentiellement différents. De même il n'y aura donc que deux groupes d'ordre 2 simplement connexes, différents.

On trouve aisément pour le premier une réalisation par des transformations linéaires. Le fait que le symbole du crochet s'annule exprime la permutabilité des transformations infi-

[1] B. von Kerékjártó, Geometrische Theorie der zweigliedrigen kontinuierlichen Gruppen. *Abhandl. Math. Semin. Hamburg Univ.*, 8 (1930), p. 107-114.

nitésimales de base, **u** et **v**. Il s'en suit que tout le groupe est abélien. Or, les translations du plan

$$\left.\begin{aligned} x' &= x + a \\ y' &= y + b \end{aligned}\right\} \qquad (\mathrm{I}')$$

forment un groupe abélien d'ordre 2.

Et cette réalisation est déjà la réalisation régulière que seule nous avions jusqu'ici considérée. Le plan des a et b est la variété-groupe, $a = b = 0$ l'élément unité.

Pour obtenir une réalisation du deuxième cas rappellons-nous le groupe suivant de transformations linéaires à une variable

$$x' = ax + b \qquad (a > 0) \qquad (\mathrm{II}')$$

Ce groupe d'ordre 2 n'est pas abélien; il est donc différent du groupe des translations, et comme il existe au plus deux groupes simplement connexes d'ordre 2, le groupe considéré doit appartenir au deuxième anneau infinitésimal. Ceci se voit d'ailleurs immédiatement. Car comme transformations infinitésimales engendrant le groupe on peut choisir deux transformations qui sont données sur la droite des x par

$$\frac{dx}{da} = x = \mathrm{X}\,, \qquad \frac{dx}{db} = 1 = \mathrm{Y}\,.$$

Le symbole du crochet en déduit la transformation infinitésimale

$$(\mathrm{XY}) = \frac{\partial \mathrm{X}}{\partial x}\mathrm{Y} - \frac{\partial \mathrm{Y}}{\partial x}\mathrm{X} = 1 = \mathrm{Y}\,.$$

La variété-groupe est le demi-plan des a, b $(a > 0)$, et l'élément unité E le point $a = 1$, $b = 0$. Les vecteurs de support E correspondant aux deux transformations infinitésimales, nous les désignons par

$$-\mathbf{v} \quad \text{et} \quad \mathbf{u}$$

pour tomber directement sur la forme (II):

$$-(\mathbf{v} \times \mathbf{u}) = \mathbf{u} \times \mathbf{v} = \mathbf{u}\,.$$

Il n'y a dans ce groupe, l'élément unité excepté, aucun élément permutable avec tous les autres. Le centre est formé du seul élément unité, il n'a donc pas de sous-groupes invariants discontinus. Par conséquent, pour le groupe de germe (II), le groupe simplement connexe est le seul groupe qui existe.

Il en est autrement du cas (I). Ici, le sous-groupe invariant discontinu peut être formé ou bien du seul élément unité, ou bien du groupe discontinu de translations dans une, ou dans deux directions. On arrivera respectivement aux domaines fondamentaux des fonctions ou simplement périodiques ou doublement périodiques. Le groupe facteur relatif au sous-groupe invariant discontinu sera dans les deux cas

$$\left.\begin{aligned} x' &\equiv x + a \pmod 1 \\ y' &= x + b \end{aligned}\right\} \text{groupe du cylindre}$$

ou

$$\left.\begin{aligned} x' &\equiv x + a \pmod 1 \\ y' &\equiv y + b \pmod 1 \end{aligned}\right\} \text{translations du tore.}$$

La variété-groupe est dans le premier cas un cylindre infini dans les deux directions, dans le deuxième le tore. Nous avons vu plus haut que le tore était la seule surface fermée susceptible d'être une variété-groupe; nous venons de voir qu'en effet le tore est une variété-groupe. Il y a donc en tout trois groupes différents de germe (I).