

SUR LA CRISE CONTEMPORAINE DES MATHÉMATIQUES

Autor(en): **Barzin, Marcel**

Objektyp: **Article**

Zeitschrift: **L'Enseignement Mathématique**

Band (Jahr): **34 (1935)**

Heft 1: **L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE**

PDF erstellt am: **16.07.2024**

Persistenter Link: <https://doi.org/10.5169/seals-26598>

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern. Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

Haftungsausschluss

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

SUR LA CRISE CONTEMPORAINE DES MATHÉMATIQUES¹

PAR

Marcel BARZIN (Bruxelles).

Ce que M. WEYL a baptisé de ce nom majestueux, c'est une série de difficultés apparues dans la théorie des ensembles. Elles ont d'ailleurs une gravité exceptionnelle et requièrent la réflexion de tous les mathématiciens par le fait qu'elles sont étroitement liées à des procédés de raisonnement employés dans les fondements de l'analyse et de la théorie des nombres.

Ces difficultés paraissent être de nature purement logique et c'est en revoyant l'appareil du raisonnement qu'on pourra les surmonter. Déjà plusieurs solutions en ont été proposées, parmi lesquelles la théorie des types de WHITEHEAD et RUSSELL semblent jusqu'à présent la plus élaborée. Ce que nous lui reprocherions, pour notre part, c'est de ne pas serrer le problème d'assez près et d'indiquer une méthode, efficace sans aucun doute, mais qui n'est pas indispensable dans la majorité des cas, sans que nous ayons une règle claire pour nous dire où nous sommes forcés d'y recourir et où, au contraire, nous ne sommes pas tenus à ces précautions.

Entre ces tentatives de solution, celle de M. BROUWER est de beaucoup la plus révolutionnaire. Elle n'aboutit à rien moins qu'à une refonte complète des mathématiques. Ces larges sacrifices qu'il nous demande montrent évidemment tout de suite

¹ Conférence faite le 18 juin 1934 dans le cycle des *Conférences internationales des Sciences mathématiques* organisées par l'Université de Genève; série consacrée à la Logique mathématique.

qu'il serre la question de beaucoup moins près encore que n'avaient fait Russel et Whitehead. Mais l'ardeur d'apôtre qui se dégage de la personne de M. BROUWER, la profondeur et la sincérité de ses convictions, la puissance polémique de ses affirmations tranchantes ont en elles un dynamisme tel, que c'est lui qui en est venu aujourd'hui à personnifier la crise des mathématiques. C'est pourquoi je ne voudrais m'occuper que de sa position dans ces quelques mots que l'Université de Genève m'a fait le grand honneur de me demander.

1. — L'angle par lequel on peut pénétrer le plus facilement dans la pensée de M. BROUWER, ce sont ses définitions du vrai et du faux. Je vais tâcher de les caractériser en les opposant aux notions classiques correspondantes.

Le signe de la fausseté, pour les mathématiciens, a toujours été la contradiction. Toute proposition est fausse qui contredit une des propositions vraies — axiomes ou théorèmes dérivés des axiomes — de la théorie. Et le vrai se définit par la Non-Contradiction, c'est-à-dire, toute proposition dont la contradictoire — au sens logique précis de ce terme — est fausse. Maintenant, parmi ces propositions vraies, depuis toujours aussi, les mathématiciens connaissent une famille privilégiée: celles dont on peut démontrer directement la vérité en construisant leur objet. Il est bien évident que ce second sens du mot vrai implique le premier, puisque la construction qui prouve la proposition réduit à l'absurde sa contradictoire. Entre ces définitions du faux et du vrai, il n'y a pas, on peut le voir aisément, d'hiatus, ou, plus précisément, de place pour une proposition qui ne serait ni vraie ni fausse¹, puisque, dès qu'une proposition n'est pas dans une des deux classes, elle est nécessairement dans l'autre.

La modification introduite dans ces notions par M. BROUWER peut se comprendre très aisément. Il garde le criterium classique de la fausseté. Mais, pour reconnaître qu'une proposition est vraie, il faut que l'on puisse construire son objet, c'est-à-dire

¹ Excepté le cas des propositions indépendantes du système d'axiomes dont on part et dont la vérité aussi bien que la fausseté est compatible avec toutes les propositions dont se compose la théorie.

qu'elle appartienne à cette famille privilégiée de vérités que les Classiques avaient reconnue sans lui accorder cette valeur éminente.

M. BROUWER dégrade ainsi du rang de vérité toutes les propositions que l'on ne peut prouver par construction, mais dont la contradictoire est fausse. Et l'on voit qu'entre le faux et le vrai nouveau, il se place toute une classe de propositions d'une troisième espèce qui ne sont ni vraies ni fausses. Sans doute, ne pourrons-nous jamais prouver que telle proposition particulière appartienne à cette classe: car nous n'avons d'autre moyen de prouver qu'on ne construira jamais l'objet d'une proposition, qu'en montrant que cette hypothèse implique contradiction, et cela serait montrer que la proposition est fausse. Mais la possibilité de ce genre de proposition intermédiaire suffit pour que nous devions renoncer au principe du tiers exclu, c'est-à-dire, à l'affirmation que toute proposition est vraie ou fausse.

2. — Sur quoi s'appuie cette modification de la notion classique de vérité ? Elle n'est pas chose à accepter à la légère. Je vous ai déjà dit qu'elle signifie pour nous la reconstruction de tout l'édifice des mathématiques actuelles, et il apparaît qu'il faut sacrifier de larges parts de notre patrimoine pour assurer le succès de l'entreprise. D'autre part, elle signifie une longue et dure rééducation de notre raison qui doit être dressée à se défier d'habitudes profondément enracinées par des siècles d'usage. Tous ces sacrifices, je suis prêt à les faire, mais il faut qu'on m'en montre la nécessité. M. Gonseth les admire beaucoup, parce qu'ils constituent une gymnastique intellectuelle raffinée. J'avoue que, grossièrement, je ne prise la gymnastique qu'à ses résultats, et je ne serais pas autrement surpris si l'homme qui a développé ses muscles un à un par des exercices savamment appropriés, se trouvait incapable, le jour d'une guerre, de porter son sac au long d'une marche de quarante kilomètres (cela s'est vu).

Or, quelles raisons l'école brouwerienne nous avance-t-elle pour exiger de nous cette refonte totale de nos habitudes ? Elle a démontré elle-même que jamais les mathématiques classiques ne tomberaient dans une contradiction en acceptant le

principe du tiers exclu. Elle nous libère évidemment des paradoxes de la théorie des ensembles: mais c'est une bien mince récompense de cet effort titanique et on aurait pu l'atteindre par des moyens bien plus économiques.

Il semble bien que la seule raison contraignante qu'avance M. BROUWER, ce soit un système philosophique. M. BROUWER est un kantien. Il admet que nos notions mathématiques sortent d'une intuition pure a priori. Kant admet deux intuitions pures a priori: celle de l'espace et celle du temps. Depuis que les géomètres ont montré le caractère relatif, non-nécessaire des propriétés de l'espace, il est impossible de soutenir que ces propriétés soient liées à notre structure mentale. Il reste à M. BROUWER de soutenir que les propriétés du temps, elles, sont vraiment des propriétés nécessaires.

Je vais vous expliquer son point de vue dans un instant, mais je ne puis me retenir de vous signaler tout de suite qu'il y a bien d'autres philosophies des mathématiques possibles, outre celle-là. On peut admettre que les notions fondamentales des mathématiques sont des réalités idéales, des idées platoniciennes, qu'on découvre par la raison, comme nos sens découvrent la réalité sensible. On peut admettre que ce sont des abstractions tirées du monde extérieur. Et qui va nous dire laquelle de ces philosophies est la bonne ?

Mais en attendant de trancher ce débat dont la solution pourrait être longue, je voudrais essayer de vous montrer deux choses: d'une part, que si l'on admettait la philosophie de M. BROUWER, on ne serait pas tenu d'admettre sa refonte de la notion de vérité; et, d'autre part, que cette dernière ne peut être liée à la nature des mathématiques.

3. — M. BROUWER admet que nous avons a priori l'intuition du temps qui se partage en événements. Le fait que les événements n'épuisent pas le temps, que ce dernier a commencé avant et se poursuivra après est l'origine de notre notion du continu. D'autre part, ces événements discrets, séparés les uns des autres par des bornes, nous donnent l'intuition du nombre entier. Nos mathématiques sortent de cette seconde intuition. Voilà, résumée très brièvement, mais je crois, d'une manière

fondièrement exacte, la théorie de la connaissance mathématique de M. BROUWER.

Je prétends que, des mêmes données philosophiques, je puis, avec autant d'aisance, faire sortir le principe du tiers exclu. Voici comment je procéderais. Deux événements sont séparés par une borne. Cette borne indispensable à la conception du discret, c'est-à-dire du nombre entier, divise le temps en deux zones, l'avant et l'après. N'ai-je pas la certitude a priori que n'importe quel événement se trouvera dans l'une ou dans l'autre de ces deux zones, sans autre possibilité ? Voilà la forme la plus générale de toute classification exhaustive. Tout événement réel qui ne se trouve pas dans une des zones est dans l'autre. Il est facile de voir que ceci est une forme du principe du tiers.

Donc, quand M. BROUWER s'appuie sur sa philosophie pour rejeter le principe du tiers exclu, c'est en vertu d'une liaison purement illusoire. Nous devons avec soin séparer et son kantisme et sa modification de la technique de la démonstration. Si celle-ci a une certaine valeur, elle ne peut la tirer que d'elle-même.

4. — Examinons maintenant si elle possède une valeur propre. J'espère vous montrer à présent que la nature même des mathématiques n'implique nullement, ou même rejette l'exigence brouwerienne. Je vais le faire en m'appuyant sur des évidences que je m'excuse de vous présenter avec une certaine minutie.

Les mathématiques sont une science déductive, tout le monde s'accorde à le croire. C'est-à-dire, que toute proposition mathématique, pour prendre rang dans la théorie que l'on construit, doit être dérivée des propositions fondamentales par un certain nombre de démarches qui doit être, en tout cas, fini.

Mais les propositions fondamentales se présentent à nous sans démonstration, non qu'il faille leur reconnaître nécessairement quelque privilège de nature, mais simplement parce que, toute démonstration devant reposer sur des prémisses, il doit y avoir un résidu de prémisses que nous assumons sans preuve. Ce sont les axiomes ou postulats du système.

D'autre part, pour qu'une théorie déductive soit parfaite, il est nécessaire que toute notion qui y entre soit définie de manière

univoque. Comme toute définition nominale ne peut se faire qu'en réduisant une notion à un complexe de notions déjà connues, il faut que là encore nous nous arrêtons à un certain résidu de notions qui servent à définir toutes les autres, mais qui, elles-mêmes, doivent être employées sans définition.

Ces notions, si nous les considérons de l'intérieur de la théorie, sont parfaitement indéterminées: ce sont des symboles vides de sens. Mais elles se déterminent en figurant dans les postulats, qui nouent entr'elles un certain nombre de relations. Ces relations éliminent une grande partie des interprétations arbitraires que nous pouvions en donner. Ainsi leur sens se trouve précisé à chaque postulat. Ce genre de définition des notions fondamentales par leurs relations mutuelles fixées dans les axiomes fournit la *seule signification* utilisée dans la théorie, car ces notions n'entrent dans la théorie que par le fait que celle-ci s'appuie sur les postulats.

Cet aspect formel d'une théorie déductive tient vraiment à sa nature propre et ceux-mêmes qui croient que le contenu des postulats et des notions fondamentales repose sur des fondements plus profonds, doivent l'admettre.

Mais, dépassant ce schéma formel que nous venons de tracer, ils veulent interpréter les notions, c'est-à-dire, les appliquer. Quelle que soit leur interprétation, qu'ils admettent que le contenu des notions soit des données de l'intuition, des réalités idéales, des élaborations de l'expérience, leur démarche sera la même: ils établiront, consciemment ou inconsciemment, une série de postulats d'un nouveau caractère que nous baptiserons « postulats d'interprétation » et qui établiront une correspondance terme à terme entre les symboles de la théorie et les significations qu'ils entendent leur imposer.

Ces prémisses une fois posées, et personne ne semble pouvoir nous les refuser, demandons-nous quelle pourra être la source d'erreurs dans une théorie déductive. Evidemment, tant que nous en restons au stade formel, la seule vérité dont un pareil système est capable est la cohérence interne. Et, par conséquent, la vérité doit se définir ici comme le non-contradictoire.

Si nous ajoutons à présent les postulats d'interprétation, il se peut qu'une relation existant entre les symboles soit en contra-

diction avec une relation existant entre les êtres — de quelque nature qu'ils soient — que nous avons fait correspondre aux symboles : et ici l'erreur, c'est encore la contradiction et la vérité de l'interprétation ne pourra se définir que par la non-contradiction.

Même au cas où il existerait, entre les symboles, une relation qui n'aurait pas de corrélation entre les réalités correspondantes, cette inexistence, il ne suffirait pas de l'affirmer, il faudrait la connaître. Et quel moyen avons-nous de connaître l'inexistence d'une entité, sinon d'établir l'existence de quelque réalité incompatible avec cette entité ? Ici encore, nous retrouvons le criterium de la contradiction comme condition nécessaire de l'erreur. Et tout ce qui n'est pas contradictoire, une fois de plus, sera vrai.

Il semble donc que, ni la nature des sciences mathématiques, ni même la philosophie de M. BROUWER ne nous contraignent à accepter la règle qu'il veut introduire de n'admettre comme vérités que celles que l'on peut construire. Dès lors, son entreprise se présente à nous simplement comme une tentative de résoudre les paradoxes de la théorie des ensembles. Et, vue de cet angle modeste, elle me paraît ressembler étrangement à l'attitude d'un chirurgien qui, pour guérir un ongle incarné, entreprendrait d'amputer la jambe entière.
