

# SUR LA CRISE CONTEMPORAINE DES MATHÉMATIQUES

Autor(en): **Errera, A.**

Objektyp: **Article**

Zeitschrift: **L'Enseignement Mathématique**

Band (Jahr): **34 (1935)**

Heft 1: **L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE**

PDF erstellt am: **15.08.2024**

Persistenter Link: <https://doi.org/10.5169/seals-26599>

## **Nutzungsbedingungen**

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern. Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

## **Haftungsausschluss**

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

# SUR LA CRISE CONTEMPORAINE DES MATHÉMATIQUES <sup>1</sup>

PAR

A. ERRERA (Bruxelles).

---

Sans vouloir faire l'historique des principales crises, pour employer le mot mis à la mode par M. WEYL, qu'a traversées, au cours des temps, le raisonnement mathématique, depuis que ZENON énonça ses fameux paradoxes, nous constatons que la plus récente et la plus grave a été amorcée par ceux de la théorie des ensembles, que vous connaissez bien. Vous n'ignorez pas que différentes méthodes ont été proposées pour les éviter et, en particulier, celle de la hiérarchie des types de RUSSEL.

La plus révolutionnaire est certainement celle de M. BROUWER. Il fonde sur l'intuition tout l'édifice mathématique, et non sur la logique, qu'il considère comme un simple code des règles du langage.

Il vous a exposé ici-même pourquoi, dans le domaine de l'infini, il se refuse à accepter le principe logique du tiers exclu, et les raisonnements qui se fondent sur ce principe général, notamment beaucoup de démonstrations par l'absurde.

Et vous avez pu voir la modification complète que ce point de vue entraîne dans tout l'édifice mathématique.

M. BROUWER, qui refuse d'exclure le tiers, ne peut nous empêcher de rechercher les conséquences de ce refus. Demandons-nous donc ce qu'elles peuvent être et tâchons de nous mettre,

---

<sup>1</sup> Conférence faite le 18 juin 1934 dans le cycle des *Conférences internationales des Sciences mathématiques* organisées par l'Université de Genève; série consacrée à la Logique mathématique.

pour quelques instants, je ne dirai pas dans la peau, ni même dans l'esprit, mais dans l'intuition des intuitionnistes.

Le principe du tiers exclu ne dit pas autre chose que ceci: une proposition est vraie ou fausse,  $p \vee \sim p$ <sup>1</sup> *tertium non datur*, il n'y a pas de proposition tierce; tiers voulant dire qui ne soit ni vrai, ni faux, ce qui est une définition négative. Chez celui qui refuse le principe, deux attitudes sont possibles: admettre l'existence de propositions tierces, nous dirions volontiers d'un tiers actuel, le démontrablement tiers, ou accepter simplement la possibilité de propositions tierces, c'est-à-dire d'un tiers éventuel. Il est certain que M. BROUWER, sans les avoir jamais nommées propositions tierces, a cherché à en montrer tout au moins l'éventualité, en se fondant sur des problèmes mathématiques non résolus, donc sur des propositions qu'aujourd'hui on ne peut pas affirmer vraies ni affirmer fausses.

Nous pourrions aussi être tentés de donner un sens en quelque sorte positif, une interprétation au mot tiers, que nous avons défini négativement; le tiers serait par exemple l'indémontré, l'incertain, le douteux. M. BROUWER dit fréquemment: « on ne peut pas trouver; on n'a pas d'indication... ». Nous ne le ferons pas.

Mais plutôt que d'interpréter le tiers, tâchons de voir à quelles conséquences nous conduit la possibilité de ce tiers éventuel; puisque, comme le montre un raisonnement très simple, le tiers actuel est contradictoire.

C'est ce qu'en 1926, M. BARZIN et moi avons essayé, sans donc nous soucier des interprétations possibles du tiers. Nous avons fait alors un raisonnement que j'ai eu l'honneur d'exposer en ce même auditoire. Vous m'excuserez de revenir sur le nœud de notre démonstration, applicable à toutes les interprétations du tiers et ne supposant nullement la construction d'un tiers actuel: le tiers possible suffit.

M. BROUWER, modifiant les formules classiques, accepte les trois implications suivantes; mais il rejette leur réciproque:

Si une proposition est vraie, il est faux qu'elle soit fausse (principe de double négation):

$$p \supset \sim \sim p$$

<sup>1</sup> Lire:  $p$  ou non  $p$ .

<sup>2</sup>  $\sim \sim p$  pour  $\sim (\sim p)$ ; le signe  $\supset$  se lit: implique.

Si une propriété en implique une autre, l'absurdité de la seconde implique l'absurdité de la première (principe de transposition):

$$(p \supset q) \supset (\sim q \supset \sim p) .$$

Et enfin le principe du syllogisme.

Si nous cherchons à construire cette logique à trois termes, à côté de l'affirmation  $p$ , c'est-à-dire la proposition  $p$  est vraie et de l'affirmation  $\sim p$ , c'est-à-dire la proposition  $p$  est fausse, absurde, il y aura une troisième valeur que nous représenterons par  $p'$ , la proposition  $p$  est tierce, c'est-à-dire ni vraie, ni fausse.

Par hypothèse, donc, nous avons une affirmation universellement vraie: *si une proposition n'est pas vraie et n'est pas tierce, elle est fausse*. Mettons en formule cette affirmation: de même que la sténographie permet d'éviter les lettres muettes, de même la formule logistique écarte les assertions tacites et non inventoriées.

Or, supposer qu'une proposition n'est pas vraie, c'est dire qu'elle est fausse ou tierce; et de même, dire qu'elle n'est pas tierce, c'est dire que l'affirmation qu'elle serait tierce n'est pas vraie, mais fausse ou tierce. Nous écrirons donc notre relation universelle:

$$(\sim p \vee p' . \sim p' \vee p'') \supset \sim p^1 .$$

Transposons cette formule; il vient:

$$\sim \sim p \supset \sim (\sim p \vee p' . \sim p' \vee p'') .$$

Le second membre est la négation d'un produit ou conjonction logique et l'on démontre, sans faire appel au tiers exclu, que cela implique la somme ou disjonction des négations; ce qui donne donc deux cas que nous examinerons tour à tour: ou bien

$$\sim \sim p \supset \sim (\sim p \vee p') ;$$

ou bien

$$\sim \sim p \supset \sim (\sim p' \vee p'') .$$

Dans le premier cas, le second membre est la négation d'une disjonction, ce qui revient au produit des deux négations, dont

<sup>1</sup>  $\hookrightarrow p'$  pour  $\hookrightarrow (p)'$ ;  $p''$  pour  $(p')'$ ; le point . se lit: et.

nous n'utiliserons que la seconde; or, puisque on a  $p \supset \sim \sim p$ , il vient par syllogisme

$$p \supset \sim p' .$$

Transposant de nouveau, nous trouvons, par syllogisme:

$$p' \supset \sim p .$$

La seconde branche de l'alternative, transformée comme la première, nous donne aussi, dans le second membre, le produit logique des négations, que, cette fois, nous conserverons toutes deux:

$$p \supset (\sim \sim p' . \sim p'')^1 .$$

Lisons cette formule: si  $p$  est vrai, alors  $p'$  n'est pas faux, puisqu'il est faux qu'il soit faux et  $p'$  n'est pas tiers, puisqu'il est faux qu'il soit tiers;  $p'$  doit donc être vrai et la formule revient donc à ceci:

$$p \supset p' .$$

Notre proposition universelle nous conduit donc à l'alternative: *ou bien, si une proposition est tierce, elle est fausse; ou bien, si elle est vraie, elle est tierce*, résultats tous deux en contradiction avec la notion du tiers et indépendants de l'interprétation de ce mot.

On pourrait encore conclure: notre logique à trois termes dégénère en une logique à deux termes.

Je ne dis pas que toute logique à trois termes soit impossible. Mais il faudrait modifier d'autres règles fondamentales de la logique, ou si l'on veut, de notre langage, que M. BROUWER n'a pas indiquées. Et si l'on fait de telles modifications, encore doit-on dire lesquelles et pourquoi on les fait.

En 1930, M. HEYTING, disciple de M. BROUWER, a donné lui-même un exposé formel de la logique de M. BROUWER; n'y a-t-il pas quelque ironie à mettre en formules l'intuitionnisme? Or, on constate que nulle part, dans son système, n'apparaît explicitement la notion du tiers. Comme il n'en parle pas, il ne rencontre pas la contradiction.

<sup>1</sup>  $\sim \sim p'$  pour  $\sim (\sim p')$ ;  $\sim p''$  pour  $\sim (p'')$ .

Remarquons, en passant, qu'il démontre qu'il est faux que le principe du tiers exclu soit faux; donc la proposition:  $p$  ou  $\sim p$  n'est pas fausse; elle n'est pas vraie non plus, puisqu'il est brouwerien. Serait-elle tierce? Mais ceci n'est qu'un paradoxe!

Les Brouweriens sont donc arrivés à la situation curieuse que voici: ils refusent le principe du tiers exclu, mais ils démontrent qu'on ne pourra jamais affirmer d'une proposition qu'elle est tierce, puisqu'alors le principe serait évidemment faux: on ne veut pas dire qu'une proposition est vraie ou fausse, et on ne peut pas dire qu'elle soit autre chose.

Permettez-moi de faire usage d'une comparaison, due à notre ami M. BARZIN, et qui me paraît faire image. L'intuitionniste est pareil à un douanier, devant qui se présentent des propositions; les unes ont un passeport qui prouve qu'elles viennent du pays du vrai; d'autres, un passeport du pays du faux; d'autres enfin voyagent sans passeport. Nous dirions: elles ne peuvent provenir que de l'un de ces deux pays, même si nous devons ignorer éternellement duquel; d'ailleurs, M. HILBERT pense qu'en cherchant bien, on finira par établir leurs pièces d'identité: c'est ce qu'il nomme l'«*Entscheidbarkeit*». Notre douanier brouwerien dira: «*Pas du tout; il y a aussi le pays du tiers, mais qui ne délivre pas de passeport; aussi je refoule toutes les propositions qui n'en ont point; je ne veux même pas les connaître; d'ailleurs, en cherchant bien, certaines trouveront leur passeport du vrai ou du faux, auquel cas elles seront admises; mais il n'est pas permis de négliger l'éventualité du tiers, bien qu'on doive ignorer n'importe quelle proposition tierce*».

Car s'il n'y avait pas au moins cette éventualité, pourquoi serait-on brouwerien et changerait-on notre langage?

Donc, la logique à trois termes demande encore à être remaniée et sauvée de la contradiction. Mais en attendant cette mise au point, comment nous empêcher d'employer le *tertium non datur*? Or, M. BROUWER prétend qu'on n'a pas le droit de s'en servir. Il vous a dit ici-même que tel théorème classique est faux, que telle démonstration est incorrecte, que telle propriété est une légende.

Une pareille contrainte, une modification aussi grave de toutes nos habitudes de penser, ne pourrait s'expliquer, dit

M. HILBERT, que si l'on en donnait une raison impérieuse. C'est ce qu'on n'a pas encore fait: M. BROUWER invoque son bon plaisir; ce n'est pas convaincant.

Mais comment, dira-t-on, pouvez-vous démontrer que la logique à trois termes est contradictoire, puisqu'elle n'est autre que la logique classique avec suppression d'un postulat? Ce doit donc être une logique plus générale et, si elle était contradictoire, il en serait de même de la logique usuelle, qui n'en est qu'un cas particulier.

A cela, je répondrai deux choses: d'abord il ne faut pas croire que la logique de M. BROUWER ait moins de postulats que la logique classique; elle en a d'autres, si l'on veut bien expliciter le ni vrai ni faux. Ensuite, la contradiction que nous avons établie disait en somme que la logique à trois termes avec tiers possible doit se réduire à une logique à deux termes; mais cet argument n'est pas opposable à la logique à deux termes.

Bref, l'école de M. BROUWER ne veut se fier qu'à l'intuition et à l'arithmétique. Pourquoi? parce que nous n'avons pas, par exemple, l'intuition de l'ensemble des nombres réels. Mais nous pourrions bien lui demander, si quelqu'un a seulement l'intuition de l'ensemble des nombres entiers? Je dirais plutôt, avec M. BARRAU, que nous connaissons quelques nombres entiers et que c'est par une généralisation et une abstraction que nous parlons de leur ensemble. De même pour les nombres rationnels; de même pour les nombres réels. Et nous appliquons les mêmes méthodes de raisonnement, la même logique à chacune des abstractions successives.

La seule raison plausible pour laquelle les intuitionnistes interdisent d'appliquer le principe du tiers exclu aux ensembles infinis en général, c'est, en fin de compte, qu'on ne l'a pas démontré. Ceci n'est d'ailleurs pas tout à fait exact, car dans un système comme celui de M. HILBERT, ce principe apparaît comme un théorème. Il est vrai qu'on postule d'autres choses. Ainsi, on admettra le principe de contradiction. Serons-nous mis, un jour, en demeure de le démontrer aussi?