

# BIBLIOGRAPHIE

Objektyp: **Group**

Zeitschrift: **L'Enseignement Mathématique**

Band (Jahr): **34 (1935)**

Heft 1: **L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE**

PDF erstellt am: **15.08.2024**

## **Nutzungsbedingungen**

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern.

Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden.

Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

## **Haftungsausschluss**

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

## BIBLIOGRAPHIE

---

David HILBERT. — **Gesammelte Abhandlungen**. Dritter Band: Analysis. Grundlagen der Mathematik. Physik. Verschiedenes. Lebensgeschichte. — Un volume gr. in-8° de VIII-436 pages et 12 figures. Prix: RM. 45. Julius Springer, Berlin, 1935.

Troisième et non moins magnifique volume que les deux précédents (voir *L'Ens. mathématique*, t. 33, 1934, p. 110). Il termine le Recueil pour lequel on avait prévu d'abord quatre tomes mais, en omettant des écrits, sur les Equations intégrales et sur les Principes des Mathématiques, déjà réunis en des ouvrages didactiques, on a pu s'en tenir à trois. Les titres des Mémoires ici réunis sont particulièrement prometteurs et, très heureusement pour les chercheurs, ces Mémoires semblent correspondre à des éclairs de génie souvent restés à l'état d'éclairs.

1. Über die stetige Abbildung einer Linie auf ein Flächenstück (1891, 2 pages).
2. Über die Entwicklung einer beliebigen analytischen Funktion einer Variablen in eine unendliche nach ganzen rationalen Funktionen fortschreitende Reihe (1897, 7 pages).
- 3-4. Über das Dirichletsche Prinzip (1905, 27 pages).
5. Zur Variationsrechnung (1906, 18 pages).
6. Wesen und Ziele einer Analysis der unendlichvielen unabhängigen Variablen (1909, 17 pages).
7. Zur Theorie der konformen Abbildung (1909, 8 pages).
8. Über den Begriff der Klasse von Differentialgleichungen (1912, 13 pages).
- a) Hilberts Arbeiten über Integralgleichungen und unendliche Gleichungssysteme. Von Ernst Hellinger (52 pages).
9. Axiomatisches Denken (1918, 11 pages).
10. Neubegründung der Mathematik (1922, 21 pages).
11. Die logischen Grundlagen der Mathematik (1923, 14 pages).
12. Die Grundlegung der elementaren Zahlenlehre (1931, 4 pages).
- b) Hilberts Untersuchungen über die Grundlagen der Arithmetik. Von Paul Bernays (21 pages).
- 13-15. Begründung der elementaren Strahlungstheorie (1913, 41 pages).
16. Die Grundlagen der Physik (1924, 32 pages).
17. Mathematische Probleme (1901, 30 pages).
18. Zum Gedächtnis an Karl Weierstrass (1897, 9 pages).
19. Hermann Minkowski (1909, 26 pages).
20. Gaston Darboux (1917, 5 pages).
21. Adolf Hurwitz (1921, 8 pages).
22. Naturerkennen und Logik (1930, 10 pages).
- c) Lebensgeschichte. Von Otto Blumenthal (42 pages).

Il est à peine utile de dire que nous n'allons pas chercher à analyser tout ceci. Tout au plus quelques remarques saillantes nous sont-elles permises.

En *a*, *b*, *c* nous avons des dissertations qui, comme il est indiqué, ne sont pas dues à David Hilbert lui-même, mais à des Collègues qui sont manifestement et très justement de grands admirateurs. Ce sont *a* et *b* qui, outre les publications en des ouvrages didactiques, ont heureusement condensé des choses très importantes qui n'ont pas risqué d'être dénaturées, étant donnée la valeur des commentateurs.

D'autre part, 9 et 22 ont été publiés, traduits en français, dans *L'Enseignement mathématique* (t. 20, 1918, p. 122 et t. 30, 1931, p. 22). C'est 22 qui, au lieu du sot Ignorabimus se termine par cet acte de foi :

Wir müssen wissen,  
Wir werden wissen.

En 16, nous croyons que David Hilbert a éprouvé le besoin, comme tant d'autres illustres esprits, de refaire, à sa manière, la Gravifique d'Einstein. Sa méthode est variationnelle et est à peu près celle de M. Th. DE DONDER qui a d'ailleurs considéré comme « identité de Hilbert » une certaine forme intégrale de l'identité de Bianchi.

En 17 nous avons une liste longue et adroitement commentée de Problèmes mathématiques: Puissance du Continu, Non-contradiction des axiomes arithmétiques, Droites comme lignes minima, Groupes de Lie sans appel au monde différentiel, ...; il y en a 23. L'exposé en fut fait, à Paris, au Congrès de 1900.

Nous n'en dirons point davantage. Point n'est besoin de quelques lignes de plus pour réattirer l'attention sur une œuvre prodigieuse aussi pleine d'esthétique que de foi. Maintenant qu'elle est devenue particulièrement accessible on peut espérer qu'après avoir engendré déjà d'immenses travaux (rien que les Thèses inspirées par Hilbert sont au nombre de 69; le volume les mentionne) elle continuera, longtemps sans doute, à guider maints esprits dans la voie ardue de la découverte.

A. BUHL (Toulouse).

CONSTANTIN CARATHÉODORY. — **Variationsrechnung und partielle Differentialgleichungen erster Ordnung.** — Un volume gr. in-8° de XII-407 pages et 31 figures. Prix: relié, RM.22. B. G. Teubner, Leipzig et Berlin, 1935.

Le Calcul des Variations est de plus en plus à la mode. Que d'ouvrages consacrés à cette belle partie des Mathématiques et analysés ici depuis quelques années. Nous n'y reviendrons pas. Pour celui-ci d'ailleurs, l'auteur lui-même a rédigé une première présentation sous forme d'un résumé d'une Conférence récemment faite à Berne, résumé reproduit dans le présent fascicule (p. 255). Il a naturellement insisté sur les points qui lui semblaient avoir le plus d'esthétique ou d'importance mais combien d'autres pourraient être signalés avec le même intérêt.

Le Calcul des Variations est d'une plasticité extraordinaire; on peut y trouver l'origine de bien des préoccupations qu'il étaye alors avec une complaisance et une solidité des plus remarquables. Il est l'une des bases les plus fermes de la Physique théorique. Ici le seul titre de l'Ouvrage indique qu'il est mis en relation avec les Equations aux dérivées partielles du premier ordre, c'est-à-dire, tout d'abord, avec les équations linéaires

ou avec les systèmes différentiels dont la forme la plus simple est la forme *canonique* de Jacobi et Hamilton. C'est ainsi que Weierstrass découvrit, pour les méthodes variationnelles intégrales, nombre de préliminaires qu'il convient de situer, plus exactement, dans le domaine des équations différentielles, domaine repris par Poincaré, avec usage essentiel des formes canoniques, pour faire varier les systèmes de la Mécanique céleste. Weierstrass trouva de merveilleux successeurs en Kneser, Hilbert, Hadamard, ...; c'est cela qu'il faut montrer, avec usage des symboles de Poisson, de la notion de *caractéristiques* et du Calcul tensoriel!

Ce Calcul peut avoir une origine variationnelle; il peut aussi naître de ses propres et incomparables symétries pas plus compliquées que celles des déterminants, s'accorder avec les propriétés matricielles, donner les multiplications extérieures si propres aux transformations intégrales et préparer ainsi le terrain à ce Calcul des variations qui semble ensuite tout dominer et tout englober.

On ne saurait trop ici insister sur le Calcul tensoriel ou Calcul différentiel absolu. Y a-t-il encore des gens qui croient qu'il a été fait pour les Théories d'Einstein? Il y a, à cet égard, des opinions si bizarres et des résistances si stupides que je suis habitué à ne plus m'étonner de rien. Certes, pour aborder la Gravifique einsteinienne, une étude préliminaire du Calcul tensoriel est toujours à recommander, mais ce Calcul en est indépendant; s'il a gagné énormément sous les influences einsteiniennes il s'applique aussi et éclaire prodigieusement les groupes, l'ancienne Mécanique, les transformations de contact et les méthodes d'intégration de Lagrange, Jacobi, Adolphe Mayer et Sophus Lie. Voilà ce que nous montre M. Carathéodory dans une Première Partie qui ne contient pas moins de 163 pages.

Ce n'est que la Seconde Partie de l'œuvre qui est véritablement intitulée: Variationsrechnung. Elle débute par une étude des formes quadratiques et de leurs transformations, étude qui relève du Calcul matriciel. Elle se poursuit par des considérations qui semblent surtout inspirées de Weierstrass et se proposent de rendre la continuité particulièrement maniable par de certaines représentations polynomiales. C'est du moins là un moyen rigoureux d'atteindre les considérations hamiltoniennes, les conditions de Legendre et les équations d'Euler. Le choix des coordonnées, l'emploi d'équations homogènes, permettent de faire ressortir une foule de subtilités qui sont comme noyées dans les problèmes anciens; ensuite ceux-ci commencent à s'épanouir avec leur vraie physionomie. Ce sont la brachistochrone, le caténoïde, la route maritime la plus avantageuse dans des courants stationnaires. C'est avec de tels sujets que M. Carathéodory a aimé nous avertir, lui-même, dans sa conférence de Berne.

Avec les variations secondes, nous revenons aux Espaces de Riemann. Avec les problèmes aux limites nous trouvons Maxwell et le cas peu connu de la route, en montagne hémisphérique, qui doit être aussi avantageuse que possible pour des vitesses dépendant de la pente.

Les théorèmes d'existence sont surtout nés ici avec Poincaré et Hadamard. Et les méthodes de Lagrange, convenablement étendues, conduisent encore à un très joli problème de navigation de Zermelo: Comment un esquif, de vitesse constante, peut-il utiliser au mieux des vents déterminés par un champ de vecteurs?

La place nous manque pour en dire davantage. Manifestement l'auteur n'a voulu construire que des choses très solides, mais cela ne l'a pas empêché

d'être très élégant, d'avoir toujours l'appui des plus jolis problèmes. Puisque nous n'insistons pas sur ceux déjà signalés à Berne, disons que l'association semble avoir une valeur éducative de premier ordre.

Riche bibliographie, conseils dans la manière de l'utiliser, index permettant de retrouver immédiatement une question; l'instrument de travail est parfait.

A. BUHL (Toulouse).

B. KAGAN. — **Abhandlungen aus dem Seminar für Vektor- und Tensoranalysis samt Anwendungen auf Geometrie, Mechanik und Physik.** Lieferung II-III. — Un vol. gr. in-8° cartonné de 383 pages. Prix: 6 roubles 50. Rédaction centrale de la Littérature technique générale. Moscou, Leningrad, 1935.

Il s'agit toujours d'une publication vraiment capitale dont nous avons déjà, ici-même (32<sup>me</sup> année, 1933, p. 276) annoncé la première livraison. En celle-ci, il y avait six Mémoires; nous en avons maintenant quinze.

1. *Kurzer Bericht über die Tätigkeit des Seminars.*
2. J. A. SCHOUTEN und D. VAN DANTZIG. *Was ist Geometrie?*
3. G. GOUREWITCH. *L'Algèbre du trivecteur.* Partie I.
4. V. HLAVATY. *Système complet des invariants d'une courbe dans un espace projectif incurvé.*
5. B. KAGAN. *Der Ausnahmefall in der Theorie der subprojektiven Räume.*
6. J. DUBNOW. *Intégration covariante dans les Espaces de Riemann à 2 et à 3 dimensions.*
7. A. LOPSCHITZ. *Integrazione tensoriale in una varietà Riemanniana a due dimensioni.*
8. P. RACHEWSKY. *Congruence rectiligne dans l'espace euclidien à n dimensions.*
9. A. NORDEN. *Die relative Geometrie der Flächen im projektiven Raume.*
10. V. WAGNER. *Sur la géométrie différentielle des multiplicités anholonomes.*
11. A. LOPSCHITZ. *Metodo geometrico per la deduzione delle condizioni di ologonomia di un sistema di vincoli.*
12. A. LOPSCHITZ. *Sugli spazi Riemanniani contenenti un campo di giaciture parallele.*
13. P. RACHEWSKY. *Sur l'interprétation infinitésimale de l'appareil des vecteurs duals.*
14. J. DUBNOW. *Sur une généralisation de l'équation de Hamilton-Cayley et sur les invariants simultanés de plusieurs affineurs.*
15. H. SCHAPIRO. *Ueber einfach-parallele Unterräume des Euklidisch-affinen Raumes.*

Il est clair que nous ne pouvons accorder une véritable analyse à ces quinze exposés. Mais tous ces titres sont très clairs et donnent, dans leur ensemble, une impression fort homogène. En 2 nous retrouvons l'impression magnifique de l'Ouvrage de J. A. Schouten et D. J. Struik dont on a eu l'analyse dans ce volume de *L'Enseignement mathématique* (p. 123). Qu'est-ce que la Géométrie? C'est surtout le jeu des groupes et la conservation de leurs invariants tantôt « nombres » et tantôt « objets ».

Une autre grande ligne, qui se dessine en 6 et 7, est l'intégration covariante. Certes, elle n'apparaît pas là pour la première fois. Elle a pour

prototype une certaine équation de Killing et dès que le Calcul différentiel absolu eût livré des dérivées covariantes on sentit la nécessité d'une intégration adéquate. Et beaucoup de problèmes de Géométrie, relatifs, par exemple, aux congruences et qui furent résolus par des méthodes qui remontent à Ribaucour, relèvent d'une intégration covariante plus ou moins masquée qui devient aujourd'hui méthodique et apparaît susceptible de généralisation.

En 3 l'Algèbre du trivecteur fait encore penser à Schouten en même temps qu'à M. Elie Cartan. Il y a là une curieuse analyse de produits extérieurs généralisés; c'est une Algèbre avec laquelle on peut finir par faire du Calcul intégral mais la méthode veut qu'on l'étudie d'abord en tant qu'algèbre.

M. V. Hlavaty, en 4, revient sur de profondes recherches concernant les courbes et les extensions des formules de Frenet.

M. B. Kagan, en 5, éclaire des singularités inévitables dans les sous-espaces projectifs.

En 9, M. A. Norden, en se plaçant au point de vue projectif, a le mérite d'être aussi explicite que possible avec les courbures, les lignes de courbure, les asymptotiques, les configurations  $F$  liées à des réseaux de Tschebyschew. Mêmes remarques pour la notion de quasi-sphère.

En 10, M. W. Wagner analyse, dans un esprit einsteinien, des problèmes de Mécanique autrefois traités dans le style classique. Curieuse extension de systèmes différentiels.

Espaces d'immersion élégamment incurvés.

Avec 11 et 12, espaces de liaisons, toujours au sens mécanique de ce mot.

En 13, passage du groupe des rotations au groupe des mouvements euclidiens.

En 14, curieux jeux d'indices. Puissance d'un affineur par expressions polynomiales.

En 15, problèmes d'applicabilité avec considération de la conservation du parallélisme généralisé.

Que de Facultés françaises gagneraient à inspirer leur enseignement de toutes ces choses si bien traitées dans un séminaire moscovite !

A. BUHL (Toulouse).

S. MANDELBJROJT. — **Séries de Fourier et Classes quasi-analytiques de Fonctions.** Leçons professées à l'Institut Henri Poincaré et à la Faculté des Sciences de Clermont-Ferrand (Collection de Monographies Emile Borel). — Un volume gr. in-8° de VIII-158 pages. Prix: 35 francs. Gauthier-Villars, Paris, 1935.

Il est certes bien inutile de présenter le jeune et brillant auteur qu'est M. Mandelbrojt. Son nom est associé, depuis longtemps déjà, à celui de M. Hadamard dont il a prolongé les travaux en matière de séries tayloriennes.

Le voici maintenant aux prises avec les fonctions quasi-analytiques dont la première idée constructive est due à M. Borel et a été poursuivie par MM. Denjoy et Carleman tout en dépendant d'un problème préliminaire de Physique théorique posé par M. Hadamard. Fonctions quasi-analytiques ! C'est-à-dire atteignant à la *presque* analyticité. Eh bien, ce n'est pas assez dire et j'aimerais mieux fonctions *suranalytiques*, car elles comprennent les fonctions analytiques ordinaires comme cas particulier. Elles sont

définissables dans tout leur domaine d'existence à partir d'un élément de ce domaine *et sans considérations tayloriennes*. Est-il possible ici, en quelques lignes, de donner une idée du pourquoi et du comment de la quasi-analyticité ? Très probablement, non. Et cependant je me sens une sympathie toute spéciale pour les pages 58 et 59 de l'œuvre où je trouve d'abord la formule

$$\Phi(z) = \int_0^{\infty} e^{-zx} \varphi(x) dx ,$$

sur laquelle il me semble qu'on peut commencer à s'expliquer simplement, ou tout au moins très en gros, en attendant l'étude de toutes les subtilités nécessaires. L'exponentielle qui est sous l'intégrale est certainement développable en série de Mac-Laurin mais ceci fait naître alors des intégrales en  $z^n x^n \varphi(x)$  qui n'ont pas forcément un sens; cela dépend de  $\varphi(x)$ . Donc le caractère taylorien de l'exponentielle ne s'étend pas obligatoirement à  $\Phi(z)$ , ce qui n'empêche pas que je puis suivre  $z$  dans tout un domaine, en partant d'une région de ce domaine si petite soit-elle, et cela sans ambiguïté quant à la nature de  $\Phi(z)$ .

Ceci vu (très grossièrement, je le répète) il reste surtout à étendre la notion de *domaine*, à atteindre notamment les domaines ayant sûrement deux dimensions. Ce sera affaire d'intégrales définies généralisant la précédente et s'y associant. Ce ne sera pas de la construction extrêmement nouvelle. L'intégrale précédente est la transformée de Laplace de  $\varphi(x)$  et les coefficients du développement de Fourier seront également propres aux manifestations quasi-analytiques. On voit que d'illustres et déjà lointains prédécesseurs ont amorcé la théorie; il fallait seulement développer celle-ci avec tout un nouvel esprit de finesse. M. Mandelbrojt n'y a pas manqué. J'espère qu'il ne m'accusera pas de l'avoir trahi dans la présente analyse, mais même si je l'avais fait (un malheur est si vite arrivé), je crois que je n'aurais enlevé à personne l'envie d'étudier son exposé si profond et si pénétrant.

A. BÜHL (Toulouse).

G. BOULIGAND, Ch. BRUNOLD, A. GRUMBACH, M. MORAND, P. SERGESCU, M. TABOURY, A. TURPAIN. — **L'Evolution des Sciences physiques et mathématiques** (Bibliothèque de Philosophie scientifique. Directeur: Paul Gaultier). — Un volume in-8° de 267 pages. Prix: 12 francs. Ernest Flammarion, Paris, 1935.

Encore un beau livre de Philosophie né de considérations de science moderne. Il est essentiellement éclectique. Les sept auteurs ne sont pas absolument d'accord, le tableau global montrant, de ce fait, des mouvements d'idées généraux et réels, ce qui ne les empêche pas d'avoir un caractère parfois étrange. Mais il n'est pas mauvais que cette étrangeté soit peinte et étudiée. Avant d'y venir, faisons la liste des différents apports.

1. G. BOULIGAND et Ch. BRUNOLD. Introduction: *Unité et Pluralité*.
2. A. TURPAIN. *Le Progrès scientifique au regard de la Théorie et de l'Expérience*.
3. M. TABOURY. *L'Alchimie et nos idées sur la Structure de l'Atome*.

4. P. SERGESCU. *Sur les traits caractéristiques des Mathématiques contemporaines en France.*
5. G. BOULIGAND. *L'Intuition et le Paradoxe.*
6. G. BOULIGAND. *Géométrie et Causalité.*
7. Ch. BRUNOLD. *La formation des Principes de la Thermodynamique.*
8. A. GRUMBACH. *Du Continu au Discontinu.*
9. M. MORAND. *Physique et Causalité.*
10. Ch. BRUNOLD. *La Chimie est-elle une Science rationnelle ?*

Pour certains de nos lecteurs lointains, il n'est peut-être pas inutile de présenter exactement les auteurs. Rappelons donc que nous sommes en présence de Professeurs d'Université, M. Max Morand enseignant à Liège, M. Sergescu à Cluj (Roumanie), MM. Bouligand, Grumbach, Taboury, Turpain, à Poitiers. M. Ch. Brunold fait exception, comme Proviseur du Lycée de Bordeaux, en attendant qu'on crée, pour lui, dans quelque Faculté, une chaire de Philosophie scientifique.

Les exposés 2 et 3 forment une Première Partie intitulée: *Au cours de l'Histoire.* Les suivants sont des *Esquisses contemporaines.*

Analysons maintenant avec une brièveté sur laquelle il est inutile d'insister. En 2, nous commençons avec cette «étrangeté» qui égratigne tantôt la mémoire de Maxwell, tantôt un Collègue illustre, tantôt les Mathématiques mêmes assimilées au moulin qui ne rend « que ce qu'on y met ». Il semble bien cependant qu'il y ait, en tout ceci, une attitude vieillotte. Maxwell et le moulin ont été expliqués depuis longtemps. Mais ne nous plaignons pas. En 5, M. Bouligand réexplique et avec des arguments très originaux. Ce qu'on met, dans les Mathématiques, ce sont des notions et des définitions qui sont forcément empruntées au monde sensible mais qui doivent paraître particulièrement simples et génératrices de ce même monde. Toute une expérience longuement héréditaire peut être accumulée en quelques schèmes fondamentaux, à grand pouvoir constructeur; dérouler ensuite la construction, ce n'est pas de la tautologie méprisant l'expérience, ce n'est pas le vain jeu du sorite. Pour moi, les équations de Maxwell sont associées à la notion même d'intégrale multiple; pour revenir à un ouvrage analysé plus haut, elles sont, pour M. Carathéodory, incluses dans la notion de dérivée variationnelle. C'est aussi l'opinion de M. Th. De Donder. Dans tout cela il y a des *polarités directrices*, expression justement chère à M. Bouligand.

Le nombre  $N$  d'Avogadro, qui s'estompe en 2, se raffermi en 3. En 8, Maxwell est nettement réhabilité. Rien de plus intéressant que de lire un expérimentateur dissertant du continu et du discontinu. On croit retrouver, sous de nouvelles espèces, la fameuse Hypothèse du Continu. L'espoir terminal est celui de belles adaptations mathématiques.

En 6, M. Bouligand examine surtout la notion de groupe comme faisant partie du *matériel causal*. On a souvent l'air de cultiver le paradoxe en changeant de groupe alors qu'il n'y a là rien de paradoxal pour l'esprit qui se rend compte de la nature du changement.

En 9, M. Max Morand défend un déterminisme logique qui est tout à l'avantage des Mathématiques. L'assimilation de la Physique à la Géométrie lui plaît. Les ensembles sont de nature causale; la véritable ordination scientifique serait en eux. Bravo. Mais nous sommes loin ici de la compréhension de nombre de physiciens. Il reste à s'entendre sur le concept de



*mesure*, voisin de celui d'intégrale au sens le plus général de ce dernier mot. Avec cela on doit pouvoir reconstruire tout le monde physique et, bien entendu, toujours dans un sens causal.

La Chimie, en 10, grâce à M. Brunold, n'échappe pas au rationalisme mais elle a des domaines de rationalisme qui lui sont propres.

M. Sergescu, en 4, fait un tableau fouillé où mathématiciens de second rang sont apparentés à ceux du premier.

Les sept auteurs ont bien travaillé, quelques boutades de l'un d'eux semblant avoir incité les autres à se surpasser. A. BUHL (Toulouse).

Florentin LEROY. — **Cours d'Algèbre et d'Analyse.** Mathématiques spéciales, Elèves ingénieurs, Etudiants des Facultés. Essai d'enseignement concret et intuitif. Tome I, Algèbre. — Un volume gr. in-8° de VIII-202 pages. Prix: 24 francs. Vuibert, Paris, 1936.

C'est avec beaucoup d'intérêt que j'ai feuilleté cet ouvrage qui n'est pas d'accord avec les directives qui nous ont été données par M. Henri Lebesgue dans ses publications *Sur la mesure des grandeurs* que *L'Enseignement mathématique* achève maintenant. M. Florentin Leroy, Professeur au Lycée de Rennes, veut être intuitif, socratique, partisan de la « redécouverte », toutes choses que M. Lebesgue n'aime pas plus que la Philosophie. Voici donc le grand savant aux prises avec un Professeur de Spéciales, à mon avis, remarquablement intelligent. C'est fort intéressant, en effet.

Personnellement le concret et l'intuitif ont toujours eu mes sympathies bien que je n'en ignore pas les faiblesses et même l'inapplicabilité dans certaines régions, telles que la microphysique, où la Science moderne s'est aventurée. Mais je crois, comme le croyait Paul Appell, qu'il faut commencer par là. Ce commencement, avec M. Leroy, est d'excellente facture. Ainsi les permutations sont étudiées sur des schèmes formés de points ou de lettres, schèmes ayant une structure géométrique élégante. La mesure des grandeurs continues, orientées ou non, avec introduction des nombres irrationnels est d'une abstraction réduite au minimum. Les produits vectoriels sont rapprochés du théorème des projections et les polynômes des nombres décimaux; j'approuve avec empressement. Les fonctions rationnelles sont soigneusement étudiées à l'infini sans préjudice des pôles à distance finie. Les opérations, les divisions, par exemple, sont développées. L'associativité, la distributivité, la commutativité sont en place. Le théorème de d'Alembert est basé sur la notion de correspondance; on n'y arrive d'ailleurs qu'après développements très explicites sur les équations du troisième et du quatrième degré, développements qui familiarisent avec le maniement des imaginaires.

La dernière partie du volume contient les systèmes d'équations avec prédominance toute naturelle des systèmes linéaires d'où une théorie des déterminants qualifiés de *coefficients résiduels*. Cette expression correspond aux éliminations qui font écrire des déterminants nuls parmi lesquels un seul, celui de l'inconnue à dégager, ne l'est pas. Là, je ne crois pas que M. Leroy puisse triompher d'un mot grandement consacré par l'usage mais si l'on se place au point de vue logique, il est bien certain que *coefficient résiduel* dit quelque chose; cela rappelle manifestement la manière d'obtenir ce coefficient dans une résolution de système linéaire. Tandis que *déterminant* ne dit rien d'analogue. Ceci caractérise l'œuvre. Parler un langage, nouveau s'il le faut, mais forçant à comprendre quelque chose. La tentative

semble plus qu'heureuse. Et je ne crois pas que les esprits qu'elle formera soient réfractaires à suivre M. Henri Lebesgue, plus tard, dans le monde olympien, de structure sévère, où excelle le profond géomètre.

A. BUHL (Toulouse).

R. ESTÈVE et H. MITAULT. — **Cours de Géométrie** à l'usage des Classes de Seconde, Première et Mathématiques. Tome II. *Géométrie dans l'Espace*. — Un vol. in-16 de VIII-284 pages et 272 figures. Prix, cartonné: 20 francs. Gauthier-Villars, Paris, 1936.

Nous avons déjà analysé, dans notre volume précédent (dernier article, p. 248), le Tome premier de cet Ouvrage. L'esprit n'en a point varié, le langage est pourtant moderne même et surtout à propos des questions les plus simples. Citons les *produits* de transformations à propos des plus simples d'entre elles, telles les homothéties et les symétries. Les polyèdres usuels naissent des symétries. Présentation, tout au moins, des surfaces réglées.

A propos des volumes et de leur mesure, je suis séduit par une excellente figure 92 qui ne déparerait pas un Traité d'Analyse où l'on parlerait d'une intégrale triple à frontière fermée quelconque. Personnellement, on le sait assez, je crois que ce sont les intégrales multiples qui expriment les vérités élémentaires; on peut les concevoir très nettement bien avant de les écrire.

J'aperçois aussi des pages, d'un détail non superflu, sur les volumes homothétiques. Que d'insuffisances, à cet égard, sont constatées rien qu'en interrogeant au Baccalauréat.

La Géométrie métrique apparaît ensuite comme celle de régularités plus grandes encore. Si ce n'est pas obligé au point de vue logique, çà l'est, du moins, dans le domaine élémentaire. Les surfaces de révolution sont illustrées par d'habiles dessins; volumes et aires courbes sont traités avec une vue claire d'inévitables difficultés. Belles remarques, notamment sur l'aire de la sphère, qui s'accordent avec l'enthousiasme d'Archimède comme avec la figure qui fut gravée sur le tombeau du prodigieux géomètre.

On termine avec des éléments de Géométrie vectorielle et de Trigonométrie sphérique. A ce propos rappelons les exposés de M. Henri Lebesgue *Sur la mesure des grandeurs* publiés récemment dans notre Revue. L'an dernier (p. 197) M. Lebesgue constatait avec tristesse que le « magnifique théorème d'Albert Girard », relatif à l'aire du triangle sphérique, était très insuffisamment enseigné. Or MM. Estève et Mitault ne l'ont pas oublié. On le trouve à la page 201 de leur *Cours*.

A l'usage, d'autres éloges viendront certainement avertis et nombreux.

A. BUHL (Toulouse).

LOUIS LONG. — **Le Livre d'Algèbre du Baccalauréat**. Première. Mathématiques et Saint-Cyr. Elèves des E.P.S., des E.N. et des Ecoles d'Arts et Métiers. — Un volume in-8° de 210 pages. Prix: 20 francs. Gauthier-Villars, Paris, 1935.

M. Louis Long est un pédagogue connu. Son ouvrage *Face à la vie* montre un utilitarisme qu'on retrouve ici en Algèbre. La théorie, sans perdre aucune qualité, ne naît que comme pour synthétiser des problèmes résolus et étudiés d'abord de manière éclectique. L'intuition, le bon sens et même la

recherche du sens particulier à chaque problème sont développés avec art et avec vigueur. Ainsi les questions de position pour les racines du trinôme sont réduites à un minimum peu encombrant. Les exercices, très nombreux, sont souvent accompagnés d'indications qui justement attirent l'attention sur des circonstances particulières à discuter autrement qu'avec des généralités d'une plasticité insuffisante.

Les solutions géométriques sont recommandées à l'appui des solutions algébriques, autant que cela est possible et les champs de possibilité ont été étendus et variés. A propos de bon sens, on apprend tout particulièrement à profiter de celui qui joue sur les figures.

Le bagage fonctionnel du Baccalauréat n'entraîne pas des graphiques bien variés. Tous sont figurés. Les progressions, les logarithmes, les sommes des carrés, des cubes, des nombres entiers sont encore examinés avec figures et calculs numériques. Le livre, dédié au fils de l'auteur, a bien quelque chose de paternel. L'intelligence de l'adolescent semble y être prise par tous les côtés possibles de manière à découvrir la paroi la plus perméable.

A. BUHL (Toulouse).

Sophus LIE. — **Gesammelte Abhandlungen.** Auf Grund einer Bewilligung aus dem Norweg. Forschungsfonds von 1919 mit Unterstützung der Videnskapsakademi zu Oslo u. der Akademie der Wissenschaften zu Leipzig hrsg. von dem Norweg. Mathem. Verein durch Dr. Fr. ENGEL, Prof. a.d. Univ. Giessen und Dr. P. HEEGAARD, Prof. a.d. Univ. Oslo. Zweiter Band, I. Teil: *Geometrische Abhandlungen.* Zweite Abteilung. — Un volume in-8° de VIII-479 pages; B. G. Teubner, Leipzig et H. Achehoug & Cie, Oslo, 1935.

Les Tomes I et II des Œuvres de Sophus Lie sont réservés à la Géométrie. Par suite de l'abondance des matières, le Tome II a dû être divisé en deux parties. La première, seule encore parue, débute par un mémoire sur les complexes et leurs applications à la théorie des équations aux dérivées partielles (*Math. Ann.*, t. V). Elle contient ensuite deux importants travaux sur la théorie des surfaces minima (*Math. Ann.*, t. XIV et XV); le premier traite des propriétés projectives des surfaces minima algébriques, tandis que le second envisage plus particulièrement les propriétés métriques. On sait que, reprenant les équations de Monge, Lie a eu recours aux courbes minima et qu'il a ainsi obtenu une interprétation très élégante qui facilite grandement l'étude des surfaces minima algébriques.

Puis viennent d'intéressantes recherches sur les lignes géodésiques et leurs transformations infinitésimales (*Math. Ann.*, t. XX). Le volume se termine par une série de Notes sur les fondements de la Géométrie dans leurs rapports avec la théorie des transformations (*Leipz. Ber.*, 1886, 1890, 1892 et *C. R.*, 1892). C'est à la suite d'une faute commise par V. Helmholtz dans un mémoire publié en 1868, que, sur la suggestion de F. Klein, S. Lie a été amené à s'occuper de ces questions.

H. FEHR.

G. A. MILLER. — **Collected Works.** Volume I. — Un vol. in-4° de XI-475 pages, \$7,50; University of Illinois, Urbana (Ill.), 1935.

Lorsqu'en 1931 M. G. A. Miller prit sa retraite, l'Université de l'Illinois constitua un Comité chargé de publier les Mémoires scientifiques du savant

professeur. A l'exclusion des Notes bibliographiques, historiques ou pédagogiques, on compte près de quatre cents Notes scientifiques appartenant pour la plupart à la Théorie des groupes finis. On sait que M. Miller a largement contribué aux progrès réalisés dans ce domaine.

Le premier Volume débute par un aperçu historique de la détermination des groupes de permutations. Puis viennent soixante mémoires sur la Théorie des groupes finis publiés de 1894 à 1900. Il se termine par un exposé du développement historique de la théorie des groupes depuis l'origine jusqu'à l'année 1900.

Tous ceux qui s'occupent de la Théorie des groupes sauront gré à l'Université de l'Illinois d'avoir assuré la publication de cet important recueil.

H. FEHR.

FR. SCHILLING. — **Die Pseudosphäre und die nichteuklidische Geometrie.** —

I. Teil: *Die geodätischen Linien der Pseudosphäre und deren Umwelt.* 2. erweiterte Aufl. 72 S. mit 64 Fig. u. 1 Bildnistafel. Nur zusammen mit Teil II lieferbar, Geb. RM. 13,60. — II. Teil: *Die geodätischen Kreise der Pseudosphäre und deren Umwelt.* 215 S. mit 78 Fig. u. 1 Figurentafel, Geh. RM. 9; B. G. Teubner, Leipzig.

La pseudosphère est à la Géométrie lobatschewskienne (ou hyperbolique) ce que la sphère est à la Géométrie riemannienne (ou elliptique). Initier le lecteur à la Géométrie non euclidienne hyperbolique par une étude approfondie de la pseudosphère, tel est le but de cet Ouvrage.

Dans une première partie, l'auteur examine les propriétés de la pseudosphère ou surface de révolution engendrée par la tractrice et de sa représentation sur le plan  $\xi, \eta$  à l'aide de la transformation  $\xi = r \cdot \varphi$ ,  $\eta = n^2/\rho$ ,  $\rho$  et  $\varphi$  étant les paramètres de la surface. Puis il étudie les géodésiques et la trigonométrie pseudosphérique dans le plan  $\xi, \eta$ .

La seconde partie est consacrée principalement aux cercles géodésiques de 1<sup>re</sup>, 2<sup>me</sup> et 3<sup>me</sup> espèces. Signalons l'intérêt que présente la considération de la surface développable engendrée par le plan tangent se déplaçant le long d'un cercle géodésique.

M. Schilling s'est efforcé de faire un exposé aussi élémentaire que possible sans craindre d'avoir parfois recours à l'intuition; de nombreuses figures sont intercalées dans le texte. Son Ouvrage est un guide précieux pour le lecteur qui veut s'initier à la Géométrie non euclidienne hyperbolique.

H. FEHR.

P. van DEUREN. — **Leçons sur le Calcul des Probabilités.** Tome deuxième:

*Les Applications des Probabilités.* — Un volume gr. in-8°, relié, 572 pages, Fr. 100; Gauthier-Villars & C<sup>ie</sup>, Paris, 1935.

Ces *Leçons* correspondent au Cours de Probabilités de l'École Militaire de Belgique. Le Tome I, paru au début de 1935, contient un exposé de la Théorie des Probabilités. Le présent volume montre les applications aux principaux domaines de la Science. Les matières sont groupées comme suit:

La Théorie des statistiques. — La Théorie des erreurs de mesure. — La Théorie des opérations aléatoires. — La Théorie des opérations viagères. — Les Probabilités du Tir. — Applications diverses à l'Arithmétique, à la mécanique statistique, à l'Astronomie; détermination du nombre d'organes

de recherche nécessaires dans une centrale téléphonique. — Le Théorème de Tchébychef. — La Théorie de la corrélation.

L'Ouvrage du Colonel Van Deuren présente un caractère didactique qui sera très apprécié de tous ceux qui l'utiliseront pour une première étude du Calcul des Probabilités et de ses applications.

W. E. OSGOOD. — **Séries infinies**. Exposé théorique et pratique. — Un vol. in-8° de 88 p., broché, 12 fr.

Th. R. RUNNING. — **Formules empiriques**. — Un vol. in-8° de 133 p. avec 20 fig., broché, 20 fr. — Monographies de Mathématiques pures et appliquées, traduites de l'anglais par A. SALLIN. Librairie J. Gibert, Paris.

Ces deux collections font partie d'une collection de monographies américaines de mathématiques supérieures, pures et appliquées, dont nous avons déjà eu l'occasion de signaler plusieurs fascicules. Rédigées par des savants et des spécialistes, elles constituent sous une forme condensée des ouvrages d'étude commodes revêtant le caractère pragmatique qui est la marque des productions américaines. L'exposé est simple, clair et facilement accessible. Il est accompagné de nombreux exercices d'applications.

Le volume consacré aux *Séries infinies* fournit un exposé théorique et pratique illustré par de nombreux exemples résolus et des exercices à résoudre empruntés à la Géométrie, la Mécanique, la Physique et l'Astronomie.

Le fascicule intitulé *Formules empiriques* traite des divers cas que peut rencontrer le praticien. L'auteur examine la détermination des constantes par les principales méthodes: différences finies, méthode des moindres carrés, interpolation. Un chapitre est consacré à l'intégration numérique.

Traduits de l'anglais par M. Sallin, ces volumes sont appelés à rendre de grands services aux étudiants et élèves ingénieurs dans les pays de langue française.

H. F.

A. WITTING. — **Repetitorium und Aufgabensammlung zur Differentialrechnung** (Sammlung Göschen). — Un vol. in-16 de 139 p. avec 58 fig., cart.; Walter de Gruyten & Co, Berlin et Leipzig, 1935.

Au nombre de plus de 400, ces exercices et problèmes se rattachent aux « Eléments de Calcul différentiel » rédigés par M. Witting pour la même collection. Bien ordonnés et d'un caractère élémentaire, ils permettent à l'étudiant de s'assimiler rapidement les notions fondamentales qui font partie d'un premier enseignement du Calcul différentiel. Chaque chapitre débute par une introduction théorique.

Ce recueil remplace le petit volume publié autrefois par M. Fr. Junker et dont il forme en quelque sorte une édition entièrement revue et augmentée.

N. ALTSHILLER-COURT. — **Modern pure solid Geometry**. — Un vol. in-8° de 311 pages avec 83 figures, \$3.90; The Mac Millan Company, New York, 1935.

Les Traités de Géométrie élémentaire se bornent, en général, pour la Géométrie dans l'espace, aux chapitres classiques, sans faire mention des

développements modernes. Le présent Ouvrage comble cette lacune; il forme un complément utile aux manuels courants.

L'auteur a réuni dans ce volume les principales contributions modernes dont il fait un exposé synthétique. Il se limite aux propriétés qui se rattachent directement aux éléments point, droite et plan, à l'exclusion des sections coniques et des quadriques. Signalons tout particulièrement les chapitres consacrés à la Géométrie de la sphère et à la Géométrie moderne du tétraèdre.

L'Ouvrage se termine par un Index bibliographique suivi d'une Table analytique des matières. H. F.

---

## BULLETIN BIBLIOGRAPHIQUE

---

### 1. Livres nouveaux :

G. FANO. — **Geometria Non Euclidea**, Introduzione Geometrica alla teoria della Relatività. (Consiglio Nazionale delle Ricerche Monografie di Matematica applicata.) — Un vol. in-8° de 250 pages avec 68 figures, relié, 55 lire; Nicola Zanichelli, Bologne, 1935.

Indice: Introduzione. La teoria delle parallele fino alla metà del secolo XIX. — Indirizzo elementare. — Interpretazione della geometria iperbolica sulle superficie a curvatura constante negativa. — Indirizzi differenziale e gruppale. — Indirizzi metrico-proiettivo. — Applicazione alla teoria della Relatività.

Henry FAVRE. — **Etude Théorique et Expérimentale des ondes de translation dans les canaux découverts**. (Publications du Laboratoire de recherches hydrauliques annexé à l'Ecole polytechnique fédérale de Zurich.) — Un vol. in-8° de 215 pages, avec 62 figures et 2 planches; Rascher & Cie, Zurich et Dunod, Paris, 1935.

Ces recherches sur les ondes de translation dans les canaux découverts ont été faites au Laboratoire de Recherches hydrauliques annexé à l'Ecole polytechnique fédérale de Zurich. L'auteur expose d'abord ses recherches théoriques, puis il décrit l'installation utilisée pour ses essais et donne les résultats obtenus en les comparant à ceux de la théorie. Dans une dernière partie il calcule un exemple pratique destiné à faciliter à l'ingénieur l'emploi des résultats obtenus.

F. HAUSDORFF. — **Mengenlehre**. 3. Aufl. (Göschens Lehrbücherei. Gruppe I, Band 7). — Un vol. in-8° de 307 pages avec 12 figures, relié, RM. 13,50; Walter de Gruyter & Co, Berlin et Leipzig, 1935.

Il nous suffira de signaler brièvement cette nouvelle édition de cet important Traité sur la *Théorie des ensembles* dont la première édition remonte à 1914. L'auteur a tenu compte des développements récents en ajoutant un nouveau chapitre et en complétant l'Index bibliographique.