

**Constantin Carathéodory. —
Variationsrechnung und partielle
Differentialgleichungen erster Ordnung. — Un
volume gr. in-8° de xii-407 pages et 31 figures.
Prix: relié, RM.22. B. G. Teubner, Leipzig et
Berlin, 1935.**

Autor(en): **Buhl, A.**

Objekttyp: **BookReview**

Zeitschrift: **L'Enseignement Mathématique**

Band (Jahr): **34 (1935)**

Heft 1: **L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE**

PDF erstellt am: **17.09.2024**

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern. Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

Haftungsausschluss

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

Il est à peine utile de dire que nous n'allons pas chercher à analyser tout ceci. Tout au plus quelques remarques saillantes nous sont-elles permises.

En *a*, *b*, *c* nous avons des dissertations qui, comme il est indiqué, ne sont pas dues à David Hilbert lui-même, mais à des Collègues qui sont manifestement et très justement de grands admirateurs. Ce sont *a* et *b* qui, outre les publications en des ouvrages didactiques, ont heureusement condensé des choses très importantes qui n'ont pas risqué d'être dénaturées, étant donnée la valeur des commentateurs.

D'autre part, 9 et 22 ont été publiés, traduits en français, dans *L'Enseignement mathématique* (t. 20, 1918, p. 122 et t. 30, 1931, p. 22). C'est 22 qui, au lieu du sot Ignorabimus se termine par cet acte de foi :

Wir müssen wissen,
Wir werden wissen.

En 16, nous croyons que David Hilbert a éprouvé le besoin, comme tant d'autres illustres esprits, de refaire, à sa manière, la Gravifique d'Einstein. Sa méthode est variationnelle et est à peu près celle de M. Th. DE DONDER qui a d'ailleurs considéré comme « identité de Hilbert » une certaine forme intégrale de l'identité de Bianchi.

En 17 nous avons une liste longue et adroitement commentée de Problèmes mathématiques: Puissance du Continu, Non-contradiction des axiomes arithmétiques, Droites comme lignes minima, Groupes de Lie sans appel au monde différentiel, ...; il y en a 23. L'exposé en fut fait, à Paris, au Congrès de 1900.

Nous n'en dirons point davantage. Point n'est besoin de quelques lignes de plus pour réattirer l'attention sur une œuvre prodigieuse aussi pleine d'esthétique que de foi. Maintenant qu'elle est devenue particulièrement accessible on peut espérer qu'après avoir engendré déjà d'immenses travaux (rien que les Thèses inspirées par Hilbert sont au nombre de 69; le volume les mentionne) elle continuera, longtemps sans doute, à guider maints esprits dans la voie ardue de la découverte.

A. BUHL (Toulouse).

CONSTANTIN CARATHÉODORY. — **Variationsrechnung und partielle Differentialgleichungen erster Ordnung.** — Un volume gr. in-8° de XII-407 pages et 31 figures. Prix: relié, RM.22. B. G. Teubner, Leipzig et Berlin, 1935.

Le Calcul des Variations est de plus en plus à la mode. Que d'ouvrages consacrés à cette belle partie des Mathématiques et analysés ici depuis quelques années. Nous n'y reviendrons pas. Pour celui-ci d'ailleurs, l'auteur lui-même a rédigé une première présentation sous forme d'un résumé d'une Conférence récemment faite à Berne, résumé reproduit dans le présent fascicule (p. 255). Il a naturellement insisté sur les points qui lui semblaient avoir le plus d'esthétique ou d'importance mais combien d'autres pourraient être signalés avec le même intérêt.

Le Calcul des Variations est d'une plasticité extraordinaire; on peut y trouver l'origine de bien des préoccupations qu'il étaye alors avec une complaisance et une solidité des plus remarquables. Il est l'une des bases les plus fermes de la Physique théorique. Ici le seul titre de l'Ouvrage indique qu'il est mis en relation avec les Equations aux dérivées partielles du premier ordre, c'est-à-dire, tout d'abord, avec les équations linéaires

ou avec les systèmes différentiels dont la forme la plus simple est la forme *canonique* de Jacobi et Hamilton. C'est ainsi que Weierstrass découvrit, pour les méthodes variationnelles intégrales, nombre de préliminaires qu'il convient de situer, plus exactement, dans le domaine des équations différentielles, domaine repris par Poincaré, avec usage essentiel des formes canoniques, pour faire varier les systèmes de la Mécanique céleste. Weierstrass trouva de merveilleux successeurs en Kneser, Hilbert, Hadamard, ...; c'est cela qu'il faut montrer, avec usage des symboles de Poisson, de la notion de *caractéristiques* et du Calcul tensoriel !

Ce Calcul peut avoir une origine variationnelle; il peut aussi naître de ses propres et incomparables symétries pas plus compliquées que celles des déterminants, s'accorder avec les propriétés matricielles, donner les multiplications extérieures si propres aux transformations intégrales et préparer ainsi le terrain à ce Calcul des variations qui semble ensuite tout dominer et tout englober.

On ne saurait trop ici insister sur le Calcul tensoriel ou Calcul différentiel absolu. Y a-t-il encore des gens qui croient qu'il a été fait pour les Théories d'Einstein ? Il y a, à cet égard, des opinions si bizarres et des résistances si stupides que je suis habitué à ne plus m'étonner de rien. Certes, pour aborder la Gravifique einsteinienne, une étude préliminaire du Calcul tensoriel est toujours à recommander, mais ce Calcul en est indépendant; s'il a gagné énormément sous les influences einsteiniennes il s'applique aussi et éclaire prodigieusement les groupes, l'ancienne Mécanique, les transformations de contact et les méthodes d'intégration de Lagrange, Jacobi, Adolphe Mayer et Sophus Lie. Voilà ce que nous montre M. Carathéodory dans une Première Partie qui ne contient pas moins de 163 pages.

Ce n'est que la Seconde Partie de l'œuvre qui est véritablement intitulée: Variationsrechnung. Elle débute par une étude des formes quadratiques et de leurs transformations, étude qui relève du Calcul matriciel. Elle se poursuit par des considérations qui semblent surtout inspirées de Weierstrass et se proposent de rendre la continuité particulièrement maniable par de certaines représentations polynomiales. C'est du moins là un moyen rigoureux d'atteindre les considérations hamiltoniennes, les conditions de Legendre et les équations d'Euler. Le choix des coordonnées, l'emploi d'équations homogènes, permettent de faire ressortir une foule de subtilités qui sont comme noyées dans les problèmes anciens; ensuite ceux-ci commencent à s'épanouir avec leur vraie physionomie. Ce sont la brachistochrone, le caténoïde, la route maritime la plus avantageuse dans des courants stationnaires. C'est avec de tels sujets que M. Carathéodory a aimé nous avertir, lui-même, dans sa conférence de Berne.

Avec les variations secondes, nous revenons aux Espaces de Riemann. Avec les problèmes aux limites nous trouvons Maxwell et le cas peu connu de la route, en montagne hémisphérique, qui doit être aussi avantageuse que possible pour des vitesses dépendant de la pente.

Les théorèmes d'existence sont surtout nés ici avec Poincaré et Hadamard. Et les méthodes de Lagrange, convenablement étendues, conduisent encore à un très joli problème de navigation de Zermelo: Comment un esquif, de vitesse constante, peut-il utiliser au mieux des vents déterminés par un champ de vecteurs ?

La place nous manque pour en dire davantage. Manifestement l'auteur n'a voulu construire que des choses très solides, mais cela ne l'a pas empêché

d'être très élégant, d'avoir toujours l'appui des plus jolis problèmes. Puisque nous n'insistons pas sur ceux déjà signalés à Berne, disons que l'association semble avoir une valeur éducative de premier ordre.

Riche bibliographie, conseils dans la manière de l'utiliser, index permettant de retrouver immédiatement une question; l'instrument de travail est parfait.

A. BUHL (Toulouse).

B. KAGAN. — **Abhandlungen aus dem Seminar für Vektor- und Tensoranalysis samt Anwendungen auf Geometrie, Mechanik und Physik.** Lieferung II-III. — Un vol. gr. in-8° cartonné de 383 pages. Prix: 6 roubles 50. Rédaction centrale de la Littérature technique générale. Moscou, Leningrad, 1935.

Il s'agit toujours d'une publication vraiment capitale dont nous avons déjà, ici-même (32^{me} année, 1933, p. 276) annoncé la première livraison. En celle-ci, il y avait six Mémoires; nous en avons maintenant quinze.

1. *Kurzer Bericht über die Tätigkeit des Seminars.*
2. J. A. SCHOUTEN und D. VAN DANTZIG. *Was ist Geometrie?*
3. G. GOUREWITCH. *L'Algèbre du trivecteur.* Partie I.
4. V. HLAVATY. *Système complet des invariants d'une courbe dans un espace projectif incurvé.*
5. B. KAGAN. *Der Ausnahmefall in der Theorie der subprojektiven Räume.*
6. J. DUBNOW. *Intégration covariante dans les Espaces de Riemann à 2 et à 3 dimensions.*
7. A. LOPSCHITZ. *Integrazione tensoriale in una varietà Riemanniana a due dimensioni.*
8. P. RACHEWSKY. *Congruence rectiligne dans l'espace euclidien à n dimensions.*
9. A. NORDEN. *Die relative Geometrie der Flächen im projektiven Raume.*
10. V. WAGNER. *Sur la géométrie différentielle des multiplicités anholonomes.*
11. A. LOPSCHITZ. *Metodo geometrico per la deduzione delle condizioni di ologonomia di un sistema di vincoli.*
12. A. LOPSCHITZ. *Sugli spazi Riemanniani contenenti un campo di giaciture parallele.*
13. P. RACHEWSKY. *Sur l'interprétation infinitésimale de l'appareil des vecteurs duals.*
14. J. DUBNOW. *Sur une généralisation de l'équation de Hamilton-Cayley et sur les invariants simultanés de plusieurs affineurs.*
15. H. SCHAPIRO. *Ueber einfach-parallele Unterräume des Euklidisch-affinen Raumes.*

Il est clair que nous ne pouvons accorder une véritable analyse à ces quinze exposés. Mais tous ces titres sont très clairs et donnent, dans leur ensemble, une impression fort homogène. En 2 nous retrouvons l'impression magnifique de l'Ouvrage de J. A. Schouten et D. J. Struik dont on a eu l'analyse dans ce volume de *L'Enseignement mathématique* (p. 123). Qu'est-ce que la Géométrie? C'est surtout le jeu des groupes et la conservation de leurs invariants tantôt « nombres » et tantôt « objets ».

Une autre grande ligne, qui se dessine en 6 et 7, est l'intégration covariante. Certes, elle n'apparaît pas là pour la première fois. Elle a pour