doit, semble-t-il, s'appliquer spécialement à certaines des conditions définies, pendant que d'autres doivent être plutôt nommées « conditions initiales », les premières se comportant d'une façon très différente des secondes.

Avant même de résoudre des problèmes de cette espèce, on doit se demander quels sont ceux qu'il convient de se poser, autrement dit, de quelle nature sont les conditions définies propres à déterminer une solution. Ce premier aspect du sujet est le seul auquel seront consacrées les réunions qui vont suivre, et il suffira amplement à les occuper toutes.

I

Pour l'Analyse classique, la question était censée comporter une première réponse, simple et générale, donnée par le théorème de Cauchy pour lequel on possède la célèbre et belle démonstration de Sophie KOWALEWSKI. En se bornant, pour prendre le cas le plus intéressant, à une équation du second ordre, et en appelant x, x_1, ..., x_n les variables indépendantes, ce théorème s'énonce de la manière suivante: *si l'équation aux dérivées partielles*

$$F\left(x\,,\, x_1\,,\, \dots\,,\, x_n\,,\, u\,,\, \frac{\partial u}{\partial x_i}\,,\, \frac{\partial^2 u}{\partial x_i\, \partial x_k}\right) = 0 \qquad \begin{pmatrix} i,\ k = 0,\ 1,\ 2,\ \dots,\ n \\ x_0 = x \end{pmatrix} \tag{1}$$

peut être résolue par rapport à la dérivée $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}$, *soit*

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = f\left(x\,,\, x_1\,,\, \dots\,,\, x_n\,,\, u\,,\, \frac{\partial u}{\partial x_i}\,,\, \frac{\partial^2 u}{\partial x_i\, \partial x_k}\right), \tag{1'}$$

la fonction f *contenant ou pouvant contenir toutes les variables indépendantes, la fonction inconnue* u, *toutes ses dérivées du premier ou du second ordre à l'exception de celle qui figure au premier membre et étant fonction holomorphe de ces quantités, cette équation admet une solution et une seule holomorphe en* x, x_1, ..., x_n *satisfaisant aux conditions*

$$u = g(x_1\,,\, \dots\,,\, x_n)\,,\quad \frac{\partial u}{\partial x} = h(x_1\,,\, \dots\,,\, x_n)\ ,$$

pour $\mathrm{x} = 0$, g *et* h *étant des fonctions holomorphes données de* $\mathrm{x}_1, \mathrm{x}_2, \ldots, \mathrm{x}_n$.

Plus généralement, au lieu de l'hyperplan $x = 0$, on peut considérer une hypersurface

$$\mathrm{S}(x, x_1, \ldots, x_n) = 0 \qquad \text{(S)}$$

et, en chaque point de cette hypersurface, se donner la valeur de l'inconnue u et d'une de ses dérivées premières (convenablement choisie, c'est-à-dire dans une direction non tangente à S). Telles seront les conditions définies que l'on adjoindra à l'équation aux dérivées partielles indéfinie (1) pour déterminer u; le problème de Cauchy ainsi posé se ramène évidemment, par une transformation ponctuelle, au précédent, auquel il se réduit lorsque la surface qui porte les données, c'est-à-dire la surface S, est le plan $x = 0$.

La surface S étant elle-même supposée analytique et sans point régulier dans la région Ω que l'on considère, le problème admettra, en général, une solution et une seule. On sait en effet que les données de Cauchy permettent de calculer successivement, en chaque point de S, les valeurs numériques de toutes les dérivées partielles de u et d'en déduire, pour cette quantité, un développement de Taylor, lequel se trouve être convergent.

Il y a toutefois un cas d'exception, à savoir celui où la surface S est *caractéristique*, c'est-à-dire, physiquement parlant, représente la propagation d'une onde compatible avec l'équation (1). Si cette dernière est linéaire, ou, tout au moins, linéaire par rapport aux dérivées secondes, soit

$$\Sigma \mathrm{A}_{ik} \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \, \partial x_k} + \mathrm{H} = 0, \qquad \left(\begin{matrix} i, k = 0, 1, 2, \ldots, n \\ x_0 = x \end{matrix} \right) \qquad (2)$$

la condition qui définit les caractéristiques s'obtient en remplaçant, dans les termes du second ordre, chacune des dérivées $\frac{\partial^2 u}{\partial x_i \, \partial x_k}$ par le produit correspondant de deux indéterminées $\gamma_i \gamma_k$, ce qui donne une forme quadratique, la *forme caractéristique*

$$\mathbf{A} = \Sigma \mathrm{A}_{ik} \gamma_i \gamma_k \qquad (3)$$

et prenant pour γ, γ_1, ..., γ_n les dérivées partielles (du premier ordre) $\frac{\partial u}{\partial x}$, $\frac{\partial u}{\partial x_1}$, ..., $\frac{\partial u}{\partial x_n}$. Le résultat ainsi obtenu doit être nul pour que S soit caractéristique. S'il en est ainsi, on a bien une exception au théorème fondamental; mais cette exception confirme, en un sens, la règle; car le problème qui consiste à trouver u et, tout d'abord, à en calculer les dérivées successives en chaque point de S est, en général impossible et, s'il n'est pas impossible, est nécessairement indéterminé, absolument comme il arrive pour un système de n équations du premier degré à n inconnues dont le déterminant est nul.

Ce cas mis à part, il faut encore observer que, comme pour les équations différentielles ordinaires, la solution n'est ainsi formée et son existence établie que *localement*, c'est-à-dire, dans le premier cas envisagé tout à l'heure, pour x inférieur à un certain nombre positif α et, dans le second, pour les points suffisamment voisins de S. On pourra d'ailleurs habituellement faire, mais seulement jusqu'à une certaine limite, que l'on ne peut même pas assigner *a priori*, le prolongement analytique de ce premier élément de solution, ainsi qu'il arrive pour les équations différentielles ordinaires.

II

Les contemporains de Cauchy et leurs successeurs immédiats ont considéré le résultat ainsi obtenu comme donnant une première réponse définitive à la question. On avait d'autant moins de raisons d'en douter qu'on avait l'exemple tout analogue des équations différentielles ordinaires. Une équation différentielle du second ordre

$$\frac{d^2y}{dx^2} = f\left(x, y, \frac{dy}{dx}\right) \tag{4}$$

admet en général une solution et une seule correspondant à des *conditions initiales* données, savoir que pour $x = a$, y prenne une valeur numérique donnée b et $\frac{dy}{dx}$ une valeur numérique donnée b' (sauf pour certains systèmes exceptionnels de valeurs