Zeitschrift: L'Enseignement Mathématique

Herausgeber: Commission Internationale de l'Enseignement Mathématique

Band: 35 (1936)

Heft: 1: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE

Artikel: LA GÉOMÉTRIE DES DISTANCES ET SES RELATIONS AVEC LES AUTRES BRANCHES DES MATHÉMATIQUES

Autor: Menger, Karl

DOI: https://doi.org/10.5169/seals-27321

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Mehr erfahren

Conditions d'utilisation

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. En savoir plus

Terms of use

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. Find out more

Download PDF: 11.07.2025

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, https://www.e-periodica.ch

LA GÉOMÉTRIE DES DISTANCES ET SES RELATIONS AVEC LES AUTRES BRANCHES DES MATHÉMATIQUES [1]

(GÉOMÉTRIE ÉLÉMENTAIRE, ANALYTIQUE ET AXIOMATIQUE. ALGÈBRE ET ALGÈBRE DES VECTEURS. — GÉOMÉTRIE DIFFÉRENTIELLE. — CALCUL DES VARIATIONS)

PAR

Karl MENGER (Vienne).

Le grand progrès de la Géométrie au commencement de l'époque moderne est dû à l'introduction des méthodes analytiques par DESCARTES et FERMAT. Cette méthode consiste en la construction de modèles arithmétiques pour les entités spatiales. Les points sont définis par des nombres (coordonnées), les courbes et les surfaces par des équations et la géométrie analytique est l'application de l'algèbre et de l'analyse à ces modèles arithmétiques.

Cette méthode a enrichi d'un nouveau monde le domaine des entités géométriques étudiées jusqu'alors et n'a cessé de fournir depuis sa découverte des problèmes sur notre espace. C'est cette idée encore qui a suggéré la plupart des généralisations de la conception d'espace: celle de RIEMANN et d'autres qui ont trouvé application en géométrie différentielle, par exemple celle de M. FINSLER, de même que celle utilisée dans la géométrie des nombres par MINKOWSKI. Ces espaces généralisés sont basés essentiellement sur la représentation de leurs points par des coordonnées.

---

[1] Conférence faite le 25 octobre 1935 dans le cycle des *Conférences internationales des Sciences mathématiques* organisées par l'Université de Genève; série consacrée à *Quelques questions de Géométrie et de Topologie.*

Malgré son importance historique et ses nombreux avantages on ne doit cependant pas oublier, me semble-t-il, que d'un point de vue purement géométrique l'étude des modèles arithmétiques au moyen de l'analyse n'est qu'un procédé entre plusieurs possibles; ce procédé impose par ailleurs aux recherches des restrictions assez considérables qui ne sont pas inhérentes à la nature des figures spatiales.

J'ai été ainsi conduit depuis quelques années à développer une géométrie qui se passe des modèles arithmétiques, tout en s'occupant des problèmes relatifs aux notions classiques: convexité, courbure, géodésiques, etc. Les points ne sont alors pas nécessairement définis par des coordonnées, ni les figures par des équations. La géométrie des distances ou géométrie métrique est basée sur la donnée d'un ensemble d'éléments de nature quelconque assujettis à la seule condition qu'à deux d'entre eux corresponde toujours un certain nombre. Nous nous plaçons donc dans l'hypothèse d'un de ces espaces généraux que M. Fréchet a introduits dans les mathématiques pour les appliquer au calcul fonctionnel et qui, plus tard, se sont montrés extrêmement féconds pour les recherches en topologie, en particulier pour les théories de la connexité, de la dimension, des courbes.

La géométrie des distances ne fait pas partie de la topologie car elle ne s'occupe pas des transformations homéomorphes, la distance n'étant pas en général invariante dans une homéomorphie. Mais tant par l'étude des espaces généraux que par ses méthodes elle est assez voisine de la topologie générale faisant, avec cette dernière, partie de la géométrie « ensembliste » (mengentheoretische Geometrie).

Bien que récente et peu connue jusqu'à présent, la géométrie des distances est déjà si développée qu'une simple énumération de tous ses résultats serait impossible en un temps si limité. Ce que je me propose ici c'est donc seulement de mettre en évidence quelques-unes de ses liaisons nombreuses et étroites avec d'autres branches des mathématiques et j'insiste d'autant plus sur ce point qu'on fait parfois à la géométrie des ensembles le reproche de se détacher complètement des mathématiques

classiques et des problèmes dont s'occupe la plupart des mathématiciens.

Nous traiterons d'abord brièvement de quelques-uns des rapports entre la géométrie métrique et la géométrie analytique élémentaire des espaces ordinaires. Des remarques concernant l'algèbre et l'algèbre des vecteurs suivront. Nous passerons ensuite à l'étude de la convexité dont la théorie générale se lie étroitement à la géométrie axiomatique de l'espace ordinaire. Puis, toujours du point de vue des distances, nous introduirons la notion de courbure qui sera qualifiée pour servir de point de départ vers une géométrie différentielle. Nous terminerons par l'étude des lignes géodésiques qui nous fournira des résultats nouveaux très généraux relatifs au Calcul des variations.

I. — Géométrie des distances et géométrie analytique élémentaire.

En géométrie analytique élémentaire on prend comme point de départ de la théorie des espaces euclidiens à n dimensions la représentation de chaque point par n nombres $x_1, x_2, \ldots, x_n$ réels ou complexes selon qu'il s'agit de l'espace réel ou de l'espace complexe C_n. On appelle carré de la distance des points $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ et $(y_1, y_2, \ldots, y_n)$ le nombre [1]

$$(y_1 - x_1)^2 + (y_2 - x_2)^2 + \ldots + (y_n - x_n)^2 \tag{1}$$

en se réservant de prendre comme distance la racine carrée positive de l'expression précédente dans le cas où celle-ci est non négative. Nous appellerons *espace* à *carrés de distances complexes* [2] un ensemble d'éléments quelconques tel qu'à tout

---

[1] Pour les espaces *unitaires* on fixe comme distance le nombre réel

$$(y_1 - x_1)(\overline{y_1} - \overline{x_1}) + \ldots + (y_n - x_n)(\overline{y_n} - \overline{x_n})$$

en désignant par $\overline{x}$ le conjugué $\xi - i\eta$ du nombre $x = \xi + i\eta$. Il est clair que du point de vue des distances cet espace unitaire à n dimensions est identique à un espace euclidien réel à $2n$ dimensions.

[2] On peut généraliser cette notion et parler d'un espace à distances empruntées à un système donné S, par exemple à un corps de nombres au sens de l'algèbre abstraite ou à un groupe abstrait. Pour des applications au calcul des variations j'ai récemment étudié des espaces dont les distances ne satisfont pas à l'axiome de symétrie (Δ_2). On pourrait appeler les espaces satisfaisant aux axiomes (Δ_1) et (Δ_2) espaces *à distances*

couple p, q de deux de ses éléments il corresponde un nombre $\overline{pq}^2$ (dit carré de la distance de p à q) assujetti aux conditions:

$$\overline{pp}^2 = 0 \,, \qquad (\Delta_1)$$

$$\overline{pq}^2 = \overline{qp}^2 \,. \qquad (\Delta_2)$$

Dans un espace à carrés de distances complexes tout ensemble F ne contenant qu'un nombre fini de points, disons k points $p_1, p_2, \ldots, p_k$, est complètement caractérisé par les k^2 carrés des distances des points de F entre eux, nombres qui peuvent être rangés dans une matrice. Il résulte des conditions (Δ_1) et (Δ_2) que cette matrice est symétrique et que sa diagonale principale ne contient que des zéros. Une question qui se pose de façon naturelle est la suivante: Etant donnée une matrice $\| \alpha_{ij} \|$ $(i, j = 1, 2, \ldots, k)$ jouissant des deux propriétés mentionnées, sous quelles conditions peut-on la réaliser par les points d'un espace euclidien complexe ou réel, c'est-à-dire trouver k points $a_1, a_2, \ldots, a_k$ de cet espace tels que $\overline{a_i a_j}^2 = \alpha_{ij}$ $(i, j = 1, 2, \ldots, k)$?

Nous allons donner immédiatement la solution du problème plus général suivant [1]: Etant donné un espace à carrés de distances complexes C (c'est-à-dire une matrice de nombres en général infinie), établir les conditions nécessaires et suffisantes pour qu'on puisse l'appliquer sur un sous-ensemble de l'espace euclidien à n dimensions, et d'abord de l'espace complexe C_n. De façon précise, nous établirons les conditions pour qu'on puisse faire correspondre à chaque point de C un point et un seul de C_n de sorte que $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ et $(y_1, y_2, \ldots, y_n)$ étant les points de C_n correspondant respectivement aux points p et q de C,

---

symétriques complexes et réserver le nom d'espace à distances complexes à des ensembles dont la définition de la distance est assujettie à la condition (Δ_1) seule.

Une étude systématique des espaces à distances non symétriques, par M. Novak, paraîtra dans le cahier 8 des *Ergebnisse e. mathem. Kolloquiums.*, Wien, 1936.

[1] La caractérisation des espaces euclidiens réels et de leurs sous-ensembles au moyen des conditions (Δ^k) et (Δ^k_0) se trouve dans mon mémoire *Mathem. Annalen*, 100, p. 113. Pour une nouvelle démonstration voir *Amer. Journ. of Math.*, 53, p. 721. Des remarques sur C_2 et $E_{2,1}$ se trouvent dans *Ergebnisse eines mathem. Kolloquiums*, 2, p. 34; 4, p. 13; 5, p. 10, 16; les critères de $E_{n,-n}$ dans *Tôhoku Math. Journ.*, 37, p. 475. La caractérisation générale des sous-ensembles de C_n et $E_{n,s}$ que nous allons énoncer est due à M. Wald et se trouve dans son article, *Ergebnisse e. mathem. Kolloquiums*, 5, p. 32.

le nombre $\overline{pq}^2$ donné avec l'espace C satisfasse toujours à la condition

$$\overline{pq}^2 = (y_1 - x_1)^2 + \dots + (y_n - x_n)^2 .$$

Appelons déterminant des points $p_1, p_2, \dots, p_k$ le nombre

$$\Delta(p_1, p_2, \dots, p_k) = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 0 & \overline{p_1 p_2}^2 & \overline{p_1 p_3}^2 & \dots & \overline{p_1 p_k}^2 \\ 1 & \overline{p_2 p_1}^2 & 0 & \overline{p_2 p_3}^2 & \dots & \overline{p_2 p_k}^2 \\ 1 & \overline{p_3 p_1}^2 & \overline{p_3 p_2}^2 & 0 & \dots & \overline{p_3 p_k}^2 \\ . & . & . & . & \dots & . \\ 1 & \overline{p_k p_1}^2 & \overline{p_k p_2}^2 & \overline{p_k p_3}^2 & \dots & 0 \end{vmatrix}$$

Pour qu'un espace à carrés de distances complexes C *puisse être appliqué sur un sous-ensemble de* C_n *il est nécessaire et suffisant que*

(Δ_0^{n+3}) $\Delta(p_1, p_2, \dots, p_{n+3}) = 0$ *pour tout système de* $n + 3$ *points de* C

(Δ_0^{n+2}) $\Delta(p_1, p_2, \dots, p_{n+2}) = 0$ *pour tout système de* $n + 2$ *points de* C .

Appelons $E_{n,s}$ la partie de C_n constituée par les points $(x_1, \dots, x_m, x'_{m+1}, \dots, x'_n)$, les nombres $x_1, \dots, x_m$ étant réels, les nombres $x'_{m+1}, \dots, x'_n$ purement imaginaires, m étant égal à $\frac{n+s}{2}$. Posons $x'_j = ix_j$ $(j = m + 1, m + 2, \dots, n)$, x_j réel. Le nombre (1) devient alors

$$(y_1 - x_1)^2 + \dots + (y_m - x_m)^2 - (y_{m+1} - x_{m+1})^2 - \dots - (y_n - x_n)^2 . \quad (1')$$

s est la signature de cette forme quadratique. Le $E_{n,s}$ est un espace à carrés de distances complexes tel que, pour chaque couple p, q de points, $\overline{pq}^2$ soit réel.

Nous dirons que l'ensemble F des k points $p_1, p_2, \dots, p_k$ est de rang r s'il satisfait aux conditions (Δ_0^{r+2}) et (Δ_0^{r+3}) sans satisfaire (Δ_0^{r+1}), c'est-à-dire si les déterminants de tous les systèmes de $r + 2$ et de $r + 3$ points de F sont nuls, mais s'il existe un système $r + 1$ points dont le déterminant est différent de 0.

Pour qu'un espace où $\overline{pq}^2$ est toujours réel jouisse de la propriété d'être applicable sur un sous-ensemble de $E_{n,s}$ il est suffisant (et évidemment nécessaire) que *tout système de* n + 3 *points de* E jouisse de cette même propriété; et pour qu'un système F de $n+3$ points $p_1, p_2, \ldots, p_{n+3}$ soit applicable sur un système de $n+3$ points de $E_{n,s}$ il faut et il suffit, r désignant le rang de F, 1° que l'on ait $r \leqq n$ et que 2° parmi les systèmes de $r+1$ points $p_1, p_2, \ldots, p_{r+1}$ de F pour lesquels $\Delta(p_1, p_2, \ldots, p_{r+1}) \neq 0$ il en existe un, tel que la suite des nombres

$$\Delta(p_1) = -1, \quad \Delta(p_1, p_2), \quad \Delta(p_1, p_2, p_3), \ldots, \quad \Delta(p_1, p_2, \ldots, p_{r+1})$$

ne contienne pas deux zéros consécutifs et que le nombre N des changements de signes qu'elle présente après la suppression des zéros éventuels satisfasse à l'inégalité

$$\frac{n+s}{2} + (r-n) \leqq N \leqq \frac{n+s}{2}.$$

Pour $s = n\ (= m)$ l'espace $E_{n,s}$ est évidemment l'espace euclidien réel à n dimensions, le nombre (1′) étant $\sum_{j=1}^{n} (y_j - x_j)^2$ qui est toujours positif ou nul; on peut donc prendre comme distance (non négative) la racine carrée positive de cette expression. $E_{n,n}$ jouit en outre de la propriété que ses points sont métriquement distingués, c'est-à-dire que

$$p \neq q \text{ implique } \overline{pq}^2 \neq 0. \qquad (\Delta_3)$$

Un espace à distances non-négatives et qui distingue métriquement les points est ce que M. Fréchet avait appelé un espace E. Voici une conséquence importante de la condition (Δ_3): Une application d'un espace E sur un autre espace E conservant les distances est nécessairement biunivoque, c'est, comme nous dirons, une *congruence*. Un espace E qui peut être appliqué sur un sous-ensemble d'un espace E est donc applicable sur celui-ci au moyen d'une congruence et sera dit *congruent* à ce sous-ensemble [1].

[1] C'est ainsi que l'espace unitaire à n dimensions est congruent à l'espace euclidien réel à $2n$ dimensions.

Le résultat énoncé plus haut contient donc comme cas particulier le théorème suivant concernant l'espace euclidien réel $E_n (= E_{n,n})$:

Pour qu'un espace E *à distances non négatives et distinguant métriquement les points, soit congruent à un sous-ensemble de* E_n *il est nécessaire et suffisant que l'on ait*

(Δ_0^{n+3}) $\Delta(p_1, p_2, \dots, p_{n+3}) = 0$ *pour tout système de* $n + 3$ *points de* E,

(Δ_0^{n+2}) $\Delta(p_1, p_2, \dots, p_{n+2}) = 0$ *pour tout système de* $n + 2$ *points de* E,

(Δ^k) $sgn\, \Delta(p_1, p_2 \dots, p_k) = (-1)^{k+1}$ *ou* 0

pour tout système de k *points de* E, *où* $k = 2, 3, \dots, n + 1$.

Remarquons qu'un espace E contenant plus de $n + 3$ points et satisfaisant aux conditions (Δ^k) pour $k = 2, 3, \dots, n + 1$ et à (Δ_0^{n+2}) satisfait *eo ipso*[1] à la condition (Δ_0^{n+3}). Pour qu'un espace séparable E soit congruent à un sous-ensemble de l'espace de Hilbert il faut et il suffit que les conditions (Δ^k) soient satisfaites pour chaque entier k.

II. — La théorie de la convexité et ses relations avec la géométrie axiomatique.

Passons à l'étude de propriétés plus géométriques de l'espace et de ses sous-ensembles. Dans ce but nous considérons un ensemble d'éléments quelconques tel qu'à tout couple d'éléments (« points ») p, q il corresponde un nombre réel $\overline{pq}$ (« distance » de p et q) qui satisfait à la condition $\overline{pp} = 0$ pour tout p et à l'inégalité triangulaire $\overline{pq} + \overline{qr} \geqq \overline{pr}$ pour chaque triplet de points. Nous appellerons un tel ensemble un *espace triangulaire.* Particulièrement importants sont les espaces triangulaires à distances symétriques, non négatives, et qui distinguent métri-

[1] Un espace à distances complexes satisfaisant à la condition (Δ_0^{n+2}) ne satisfait pas nécessairement à la condition (Δ_0^{n+3}). On trouvera une étude des systèmes de $n + 3$ points non congruents à $n + 3$ points de E_n bien que $n + 2$ quelconques de leurs points soient congruents à $n + 2$ points de E_n dans mon mémoire *Mathem. Annalen*, 100, p. 124. J'ai appelé de tels systèmes *pseudo-euclidiens.*

quement les points, c'est-à-dire tels que $\overline{pq} = \overline{qp} > 0$ si $p \neq q$ et $pp = 0$; ou bien, ce qui revient au même, tels que chaque triplet de points soit congruent à un triplet de points du plan (à un triangle euclidien) [1]. L'introduction de ces espaces est due à M. Fréchet. On les appelle espaces métriques ou, d'après M. Bouligand, espaces distanciés. Comme exemples d'espaces triangulaires nous avons les espaces euclidiens de toutes dimensions et l'espace de Hilbert.

Il est bien naturel lorsqu'on a une inégalité d'étudier les cas où elle devient une égalité. Dans le cas d'un espace euclidien la relation $\overline{pq} + \overline{qr} = \overline{pr}$ a lieu pour trois points p, q, r distincts deux à deux, lorsque q est situé sur le segment joignant p et r, donc entre p et r, et seulement dans ce cas. Posons donc comme définition pour un espace distancié général qu'un point q est point *intermédiaire* entre p et r, ou plus simplement est *entre* p et r si $p \neq q \neq r$ et $\overline{pq} + \overline{qr} = \overline{pr}$. Cette notion ne jouit pas, dans les espaces généraux, de toutes les propriétés qu'elle possède sur la ligne droite. Considérons par exemple l'espace distancié constitué par quatre points p, q, r, s ayant les distances $\overline{pq} = \overline{qr} = \overline{rs} = \overline{sp} = 1$, $\overline{pr} = \overline{qs} = 2$. Il est clair que q est entre p et r, et que r est entre q et s, sans que q ou r soient entre p et s. La relation de point intermédiaire a cependant assez d'affinités avec la relation bien connue sur la ligne droite pour que la dénomination de point situé « entre » deux autres soit justifiée. Elle jouit notamment des propriétés suivantes: Si q entre p et r, alors q entre r et p, mais r non entre p et q. Si q entre p et r, et r entre p et s, alors q entre p et s, et r entre q et s. L'ensemble constitué par p et q et leurs points intermédiaires est fermé.

Nous appelons *convexe* un sous-ensemble d'un espace distancié qui contient pour chaque couple de points différents p et r au moins un point q situé entre p et r. On a alors le théorème suivant: *Un sous-ensemble fermé convexe d'un espace distancié complet contient pour tout couple de points distincts* p *et* q *un segment qui les joint*, c'est-à-dire un sous-ensemble contenant

[1] Pour un espace à distances non négatives l'inégalité triangulaire équivaut à la condition (Δ^3).

p et q et congruent à un segment de la ligne droite au sens ordinaire du mot dont la longueur est égale à la distance pq [1]. On déduit immédiatement de ce théorème qu'un sous-ensemble fermé d'un espace euclidien est convexe s'il est convexe au sens classique de MINKOWSKI et seulement dans ce cas. Remarquons d'ailleurs que dans un espace distancié convexe général il peut arriver que deux points puissent être joints par plusieurs segments. La surface d'une sphère à trois dimensions dans laquelle nous prenons comme distance la longueur du plus petit arc du grand cercle qui les joint, nous en fournit un exemple. C'est un espace convexe et complet, qui contient pour tout couple de points diamétralement opposés une infinité de segments qui les joignent.

Du point de vue topologique la notion de convexité est sinon identique du moins très voisine de celle de connexité et de connexité locale. Nous n'avons pas résolu la question de savoir si l'hypothèse — pour un espace distancié compact — d'être connexe et localement connexe est non seulement nécessaire mais encore suffisante pour que l'espace soit homéomorphe à un espace distancié convexe. Indiquons trois conditions qui sont suffisantes pour qu'un espace distancié soit homéomorphe à un espace convexe: 1° Deux points quelconques peuvent être joints par un arc de longueur finie. 2° p et q étant deux points distincts, la borne inférieure des longueurs de tous les arcs joignant p et q, est > 0. 3° A tout $\varepsilon > 0$ donné à l'avance, il correspond un $\delta > 0$ tel que deux points quelconques dont la distance est $< \delta$ puissent être joints par un arc de longueur $< \varepsilon$. En faisant alors correspondre à tout couple de points p, q de D la borne inférieure des longueurs de tous les arcs joignant p et q ou, comme nous dirons, la *distance interne* de p et q, nous obtenons un espace distancié convexe D′ homéomorphe à D. (Les segments de D′ correspondent aux arcs géodésiques de D.) [2]

---

[1] Les notions de point intermédiaire et de convexité et leurs théories sont développées dans mon mémoire *Mathem. Annalen*, 100, p. 75. Une nouvelle démonstration de l'existence d'un segment sous les conditions mentionnées a été donnée par M. ARONSZAJN, *Ergebnisse e. mathem. Kolloquiums*, 6, p. 45.

[2] Cf. mon mémoire dans le *Mathem. Annalen*, 100, p. 96. Cf. aussi HOPF und RINOW, *Comment Math. Helvet.*, 3.

La théorie de la convexité se relie à l'axiomatique de la géométrie élémentaire, en particulier aux Anordnungsaxiome de PASCH, HILBERT et de l'école américaine. L'étude des propriétés découlant de la notion de convexité permet, à partir de l'espace triangulaire complet, d'obtenir des espaces de plus en plus particularisés de ce point de vue, et finalement certaines caractérisations des espaces linéaires et euclidiens.

Nous dirons, pour esquisser ce chemin, qu'un ensemble dans un espace distancié est *extérieurement convexe* s'il contient, pour chaque couple de points p et q, au moins un point r tel que q soit entre p et r. Un ensemble fermé, à la fois convexe et extérieurement convexe dans un espace complet contient pour chaque couple de points différents une « *droite* » qui les joint, c'est-à-dire un sous-ensemble contenant p et q, congruent avec une droite au sens ordinaire du mot. Pour que tout couple de points distincts d'un espace complet, convexe et extérieurement convexe détermine une droite et une seule les joignant, il faut et il suffit que l'espace jouisse de la propriété suivante que j'ai appelée *propriété des deux triplets:* Etant donné quatre points distincts deux à deux, *l'existence de deux triplets linéaires entraîne la linéarité des deux autres triplets.* (Nous dirons que le triplet p, q, r est *linéaire* lorsqu'un de ses points est situé entre les deux autres.)

En ajoutant les conditions d'être complet, convexe et extérieurement convexe aux conditions qui caractérisent les espaces distanciés congruents aux sous-ensembles des espaces euclidiens réels (se reporter au Chapitre I), nous obtenons la caractérisation des espaces euclidiens réels eux mêmes parmi les espaces distanciés. Mentionnons encore que le point de départ de ces recherches fut un théorème de M. BIEDERMANN [1] que nous énoncerons ici de la façon suivante: Pour qu'un espace distancié compact et convexe soit congruent à un segment, il faut et il suffit qu'il contienne plus d'un point et que tout triplet de ses points soit linéaire.

Pour parvenir graduellement des espaces convexes et extérieurement convexes aux espaces linéaires et euclidiens il suffit

[1] Cf. *Mathem. Annalen*, 100, p. 114.

d'exclure l'existence dans l'espace de certaines singularités simples. Il s'agit des deux figures suivantes qui ne se rencontrent pas dans les espaces linéaires:

1. La *fourchette:* somme de trois segments pq, qr, qs n'ayant en commun deux à deux que le point q situé à la fois entre p et r, et entre p et s.

2. L'*étrier:* somme de quatre segments pq, qr, rs, ps qui n'ont en commun que des extrémités et tels que s soit entre p et r, et r entre q et s.

Si les points q et r d'un étrier sont situés entre p et s, l'étrier est somme de deux segments de mêmes extrémités (à savoir de p et s), et nous parlerons d'une *lentille*, par exemple: la somme de deux demi-grand-cercles d'une sphère. Notons deux configurations particulières intéressantes: 1° Le *cercle*, ensemble congruent à un cercle au sens ordinaire où l'on a pris comme distance de deux points la longueur du plus petit arc qui s'y termine. Le cercle constitue un étrier entre deux quelconques de ses points, il constitue plus particulièrement une lentille entre deux de ses points diamétralement opposés. 2° Le *trièdre convexe*, somme de trois segments pq, qr, qs n'ayant en commun deux à deux que le point q situé à la fois entre p et r, entre p et s, entre r et s.

Les espaces distanciés sont par définition des espaces E satisfaisant à la condition (Δ^3), c'est-à-dire des espaces E dont chaque triplet de points est congruent à un triangle euclidien. M. W. A. Wilson a récemment étudié[1] les espaces E satisfaisant aux conditions (Δ^3) et (Δ^4), c'est-à-dire des espaces E dont chaque quadruplet de points est congruent à un tétraèdre euclidien — par analogie nous pourrons appeler ces espaces: espaces *tétraédraux* — et il a obtenu le résultat intéressant suivant: Pour qu'un espace séparable et complet soit congruent à un espace euclidien ou à l'espace de Hilbert il faut et il suffit qu'il soit convexe, extérieurement convexe et tétraédral. Renvoyons le lecteur en terminant à un mémoire intéressant sur la sphère à n dimensions par M. L. M. Blumenthal[2].

---

[1] *Amer. Journ. of Math.*, 54.
[2] *Amer. Journ. of Math.*, 57.

III. — Géométrie des distances et algèbre des vecteurs.

Les conditions (Δ^k) et (Δ_0^k) du chapitre I étant de nature algébrique, les résultats de cette théorie permettent des applications dans le domaine de l'algèbre. Bornons-nous ici à mentionner les beaux résultats de M. L. M. Blumenthal sur les déterminants [1]. Nous allons entrer un peu plus dans le détail en ce qui concerne l'algèbre des vecteurs [2].

Désignons par *ensemble métrique de vecteurs* un ensemble V d'éléments de nature quelconque appelés vecteurs, tel qu'à tout couple v et w de ses éléments corresponde un nombre réel (vw) assujetti aux conditions

$$(\Gamma) \qquad (vw) = (wv)$$

$$(\Gamma') \qquad v \neq w \text{ implique } (vv) + (ww) \neq 2\,(vw).$$

Le nombre (vw) sera dit : *produit scalaire des vecteurs v et w.*

Etant donné k éléments $v_1, v_2, \ldots, v_k$ de V, nous introduirons leur déterminant de Gram $\Gamma\,(v_1, v_2, \ldots, v_k)$

$$\Gamma(v_1, v_2, \ldots, v_k) = \begin{vmatrix} (v_1 v_1) & (v_1 v_2) & \ldots & (v_1 v_k) \\ (v_2 v_1) & (v_2 v_2) & \ldots & (v_2 v_k) \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ (v_k v_1) & (v_k v_2) & \ldots & (v_k v_k) \end{vmatrix}$$

Un exemple d'ensemble métrique de vecteurs nous est fourni par la famille des vecteurs d'un espace euclidien à un nombre quelconque de dimensions, en entendant par produit scalaire de deux vecteurs le produit scalaire au sens habituel.

A quelles conditions un ensemble métrique de vecteurs V est-il isomorphe à un ensemble de vecteurs d'un espace euclidien à n dimensions E_n ? C'est-à-dire trouver les conditions pour qu'on puisse faire correspondre à tout élément de V un vecteur de E_n de façon que v' et w' étant les vecteurs homologues à deux

---

[1] *Bull. Amer. Math. Soc.*, 37, 38 et *Amer. Journ. Math.*, 56.

[2] On trouve la théorie suivante esquissée dans ma note: *Ergebnisse e. mathem. Kolloquiums*, 5, p. 27.

éléments v et w quelconques de V, on ait toujours $(vw) = (v' w')$. Voici un groupe de conditions à la fois nécessaires et suffisantes:

(Γ_0^{n+1}) $\Gamma(v_1 v_2, \ldots, v_{n+1}) = 0$

pour tout système de $n + 1$ vecteurs $v_1, v_2, \ldots, v_{n+1}$ de V.

(Γ_0^k) $\Gamma v_1, v_2, \ldots, v_k) \geqq 0$

pour tout système de k $(k = 1, 2, \ldots, n)$ vecteurs $v_1, v_2, \ldots, v_k$ de V.

De plus, dans le cas où V consiste en $n + 2$ vecteurs exactement, il faut adjoindre aux conditions précédentes la condition

$$(\Gamma_0^{n+2}) \qquad \Gamma(v_1, v_2, \ldots, v_{n+2}) = 0 .$$

Pour démontrer ce théorème, il suffit de se reporter à ce qui a été fait dans le chapitre I. Posons comme carré de la distance de deux éléments v et w de V le nombre $\overline{wv}^2 = (vv) + (ww) - 2(vw)$. Nous définissons ainsi un espace E, soit V'; les conditions (Δ_1), (Δ_2) et (Δ_3) auxquelles doit satisfaire $\overline{vw}^2$ sont en effet des conséquences immédiates de (Γ) et (Γ'). Et la condition nécessaire et suffisante pour que V soit isomorphe à un ensemble de vecteurs de l'espace euclidien E_n (auxquels on a donné la même origine p_0) c'est que V' soit applicable sur l'ensemble des extrémités de ces vecteurs. On déduira alors de (Γ_0^{n+1}), (Γ^k) $(k = 1, 2, \ldots, n)$ les conditions (Δ_0^{n+2}) et (Δ^k) $(k = 2, 3, \ldots, n + 1)$ en tenant compte de la relation

$$\Delta(p_0, p_1, \ldots, p_k) = (-2)^k \Gamma(v_1, v_2, \ldots, v_k),$$

où v_i désigne le vecteur $\overrightarrow{p_0 p_i}$.

Dans un ensemble métrique de vecteurs satisfaisant à la condition (Γ^2) le carré de la distance de deux vecteurs est toujours non-négatif [1] et nous pourrons introduire la notion de

[1] On a

$$\Gamma(v_1, v_2) = \begin{vmatrix} (v_1 v_1) & (v_1 v_2) \\ (v_2 v_1) & (v_2 v_2) \end{vmatrix} = (v_1 v_1)(v_2 v_2) - (v_1 v_2)^2.$$

La condition (Γ^2) n'est autre que l'inégalité de Schwarz $(v_1 v_1)(v_2 v_2) \geqq (v_1 v_2)^2$. Cette condition entraîne l'inégalité $(vv) + (ww) \geqq 2(vw)$. Pour le montrer il suffit de prouver l'impossibilité de la relation $(vv) + (ww) < 2(vw)$. Or celle-ci élevée au carré impliquerait $(vv)^2 + 2(vv)(ww) + (ww)^2 < 4(vw)^2 \leqq 4(vv)(ww)$, d'où $(vv)^2 - 2(vv)(ww) + (ww)^2 < 0$, ce qui est évidemment impossible, le premier

vecteur intermédiaire. Nous dirons que le vecteur v est *entre* les vecteurs u et w lorsqu'on a:
ou bien

$$\Gamma(u, w) \neq 0, \quad \Gamma(u, v, w) = 0, \quad \Gamma(u, v) + \Gamma(v, w) = \Gamma(u, w)$$

ou bien

$$\Gamma(u, w) = 0, \ \overline{uv} + \overline{vw} = \overline{uw},$$

en entendant par $\overline{xy}$ la détermination positive du radical $\sqrt{\overline{xy}^2}$.

L'ensemble de vecteurs V peut être appelé *convexe* et *extérieurement convexe* lorsqu'il contient pour tout couple d'éléments u et w au moins un élément v entre u et w, et au moins un élément x tel que w soit situé entre u et x. Pour qu'un ensemble de vecteurs V soit isomorphe à l'ensemble de tous les vecteurs de E_n il faut et il suffit qu'il soit complet, convexe et extérieurement convexe, que les déterminants de Gram soient nuls pour tout système de $n + 1$ vecteurs et non négatifs pour tout système en contenant moins de $n + 1$, et enfin qu'il existe n vecteurs dont le déterminant de Gram est $\neq 0$.

Un corollaire intéressant de notre théorème est que les opérations d'addition de deux vecteurs et de multiplication d'un vecteur par un nombre peuvent être définies dans un ensemble métrique de vecteurs. En d'autres termes, *pour développer l'algèbre des vecteurs il suffit de prendre comme point de départ la seule notion du produit scalaire* au lieu des trois opérations: addition, multiplication par un nombre et multiplication scalaire, qui ont servi de bases jusqu'à présent. En effet, étant donné deux vecteurs u et w et un nombre λ nous appellerons λu le vecteur u' tel que $\Gamma(u, u') = 0$ et $(uu') = \lambda(uu)$, et nous appellerons $u + v$ le vecteur w pour lequel $\Gamma(u, v, w) = 0$, $\Gamma\left(u, \frac{w}{2}\right) = \Gamma\left(v, \frac{w}{2}\right) = \frac{1}{2}\Gamma(u, v)$ si $\Gamma(u, v) \neq 0$ et $(ww) = (uw) + (vw)$ si $\Gamma(u, v) = 0$.

L'existence et l'unicité des vecteurs u' et w et les lois ordinaires de ces opérations d'addition et de multiplication par

---

membre étant égal à $[(vv) - (ww)]^2$. La condition (Γ^2) permet donc de préciser (Γ^1) sous la forme

$$v \neq w \text{ implique } (vv) + (ww) > 2(vw).$$

un nombre sont garanties si l'ensemble de vecteurs est complet convexe et extérieurement convexe et jouit des propriétés (Γ^k).

Les recherches de MM. WILSON et BLUMENTHAL mentionnées à la fin du Chapitre II admettent de même une traduction dans le langage de l'algèbre des vecteurs. En particulier il découle du théorème de M. WILSON (p. 358), comme l'a remarqué M. BLUMENTHAL, qu'un ensemble de vecteurs séparable et complet est isomorphe à un espace vectoriel euclidien ou hilbertien si les conditions

$$\Gamma(\varphi_1, \varphi_2) \geqq 0 \text{ pour tout couple } \varphi_1, \varphi_2 \text{ de vecteurs} \qquad (\Gamma^2)$$

$$\Gamma(\varphi_1 \varphi_2, \varphi_3) \geqq 0 \text{ pour tout triplet } \varphi_1, \varphi_2, \varphi_3 \text{ de vecteurs} \qquad (\Gamma^3)$$

sont satisfaites ou, ce qui revient au même, si tout triplet de vecteurs est isomorphe à un triplet de vecteurs de E_n, résultat qui a été obtenu directement par MM. FRÉCHET, v. NEUMANN et JORDAN [1].

IV. — LA COURBURE DANS LA GÉOMÉTRIE DES DISTANCES ET LA GÉOMÉTRIE DIFFÉRENTIELLE.

Nous avons, dans les chapitres précédents, traité, en nous plaçant au point de vue de la géométrie des distances, des problèmes où l'espace et ses sous-ensembles interviennent globalement. Mais cette géométrie permet aussi l'étude des *propriétés locales* des variétés spatiales, et pénètre ainsi dans un domaine où a triomphé jusqu'alors brillamment et exclusivement la méthode analytique; cette méthode s'appliquait si bien à cette étude qu'on a fini par identifier la théorie des propriétés locales des figures avec la géométrie différentielle: application de l'analyse, surtout du calcul différentiel, aux modèles arithmétiques représentant les figures. Et même M. BOULIGAND qui a eu le mérite en créant sa Géométrie infinitésimale directe d'introduire l'analyse moderne, en particulier la théorie des fonctions de variable réelle, dans l'étude des propriétés géométriques locales — se borne à l'étude d'espaces où chaque point est (ou pourrait être) caractérisé par un système de coordonnées.

[1] *Annals of Mathem.*, 36, p. 705, p. 719.

L'idée d'une géométrie différentielle sans coordonnées semble encore aujourd'hui presque absurde à la plupart des géomètres; cependant la géométrie des distances a déjà résolu le problème si important de la courbure d'une façon qui laisse pressentir, comme nous le disions dans l'introduction, que la méthode analytique, bien qu'elle ait joué jusqu'alors un rôle prépondérant, n'est ni la seule possible, ni celle présentant le plus de généralité, ni peut-être même la plus conforme à la nature géométrique des problèmes.

Soit D un espace distancié, q, r, s trois de ses points, il existe trois points q', r', s' dans le plan euclidien tels que les triplets q, r, s et q', r', s' sont congruents. Si ρ désigne le rayon du cercle circonscrit au triangle q', r', s', — en convenant de poser $\rho = \infty$ si q', r', s' sont en ligne droite — nous appellerons courbure du triplet q, r, s de l'espace distancié et nous désignerons par $\varkappa(q, r, s)$ l'inverse de ce rayon, c'est-à-dire $\frac{1}{\rho}$. Cette courbure sera nulle quand les trois points seront linéaires (p. 357) et seulement dans ce cas; et la propriété du segment due à M. Biedermann (p. 357) peut alors s'énoncer ainsi: Pour qu'un arc — c'est-à-dire un espace triangulaire homéomorphe à un segment — soit congruent à un segment, il faut et il suffit que tout triplet de points lui appartenant ait une courbure nulle.

Cet énoncé ne correspond pas à celui de la géométrie différentielle concernant les propriétés caractéristiques de la droite, qui fait intervenir une courbure définie en chaque point. Dans un espace distancié nous pouvons, cependant, aussi introduire une courbure *locale*, et cela de la façon suivante [1]: Nous dirons que D a la *courbure* $\varkappa(\mathrm{p})$ *au point* p, si à tout $\varepsilon > 0$ donné à l'avance, il correspond un $\delta > 0$ tel que pour tout triplet q, r, s de points de D, dont la distance à p est $< \delta$, nous ayons $|\varkappa(q, r, s) - \varkappa(p)| < \varepsilon$.

On peut alors se demander si un arc dont la courbure est nulle en chaque point est congruent à un segment. Il n'en est pas nécessairement ainsi: Prenons pour D l'ensemble des points x

[1] Cette notion de courbure et sa théorie est développée dans mon mémoire: *Mathem. Annalen*, 103.

de l'intervalle $-1 \leqq x \leqq 1$ et comme distance des points x et y le nombre

$$|x - y| \text{ si } x \text{ et } y \text{ ont le même signe,}$$

$$|x| + |y| - x^2 y^2 \text{ si } x \text{ et } y \text{ sont de signes contraires.}$$

D est alors un espace distancié homéomorphe au segment $-1 \leqq x \leqq 1$ de la droite euclidienne, dont la courbure est nulle en chaque point. Cependant cet arc n'est pas congruent à un segment, comme le montre la considération du triplet $-1, 0, 1$ dont les points ont deux à deux la même distance.

J'ai néanmoins démontré par des méthodes purement métriques qu'*un arc appartenant à un espace euclidien dont la courbure est partout nulle est un segment*, et ainsi fut établi un théorème de géométrie différentielle sans l'usage du calcul différentiel.

Comparé avec la définition classique de la courbure, la définition métrique est plus générale dans ce sens qu'elle s'applique aux espaces distanciés généraux. Mais dans le cas des espaces euclidiens MM. Haupt et Alt ont remarqué [1] que ma définition de la courbure était plus restrictive que la définition classique. Si l'arc $y = y(x)$ du plan euclidien admet au point $p_0 = (x_0, y_0)$ une courbure $\varkappa(p_0)$ au sens précédemment mentionné — disons une courbure métrique — la dérivée seconde $y''(x_0)$ existe et la courbure classique $\dfrac{y''(x_0)}{[1 + y'^2(x_0)]^{3/2}}$ est égale à $\varkappa(p_0)$. Inversement, un arc peut posséder au point $p_0 = (x_0, y_0)$ une courbure au sens classique $\dfrac{y''(x_0)}{[1 + y'^2(x_0)]^{3/2}}$ sans posséder une courbure métrique; celle-ci est en effet une fonction continue du point ce qui n'est pas nécessairement le cas pour la courbure classique, comme le montre l'exemple de la courbe $y = x^4 \sin \dfrac{1}{x}$ pour le point $p = (0,0)$.

M. Alt a modifié [2] de la façon suivante la notion de la courbure métrique: au lieu de considérer des triplets q, r, s où les trois points sont variables, il se borne à la considération des triplets

---

[1] Cf. *Ergebnisse e. mathem. Kolloquiums*, 3, p. 4.

[2] Dans sa thèse présentée à Vienne. Voir aussi: *Ergebnisse e. mathem. Kolloquiums*, 3, p. 5 et 4, p. 4.

p, q, r où deux points seuls sont variables. Il dit que D a la courbure $\varkappa(p)$ au point p, $\varkappa(p)$ étant un nombre fini, si à tout $\varepsilon > 0$ donné à l'avance, il correspond un $\delta > 0$ tel que, pour tout couple de points q, r, dont la distance à p est $< \delta$, nous ayons $|\varkappa(p, q, r) - \varkappa(p)| < \varepsilon$. Cette définition (valable dans tout espace distancié) appliquée aux courbes d'un espace euclidien est un peu plus générale que la définition classique [1]. M. Alt a montré que la condition nécessaire et suffisante pour que la courbe $y = f(x)$ — où f est une fonction définie dans un voisinage de x_0 qui n'admet pas une dérivée infinie pour $x = x_0$ — possède au point $(x_0, y_0 = f(x_0))$ une courbure, à son sens, c'est que $f'(x_0)$ existe et que les deux expressions

$$\frac{\overline{f}(x) - f'(x_0)}{x - x_0} \qquad \text{et} \qquad \frac{\underline{f}(x) - f'(x_0)}{x - x_0}$$

tendent toutes deux vers une limite finie, ces deux limites étant égales [2], quand x tend vers x_0; $\overline{f}$ et $\underline{f}$ désignent respectivement la dérivée supérieure et inférieure de la fonction f (celles-ci pouvant prendre les valeurs $+\infty$ et $-\infty$).

M. Pauc a montré récemment qu'en prenant comme définition de la dérivée seconde pour la valeur $x = x_0$, la limite finie, si elle existe, de l'expression

$$E(h, k) = \frac{\dfrac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} - \dfrac{f(x_0 + k) - f(x_0)}{k}}{\dfrac{(h - k)}{2}}$$

quand h et k tendent indépendamment l'un de l'autre vers 0, cette nouvelle définition coïncide avec la définition classique lorsque $f'(x)$ existe dans un voisinage de x_0. L'existence de

---

[1] M. Gödel a proposé la définition suivante qui est encore plus générale: Disons que l'arc D a la courbure $\varkappa(p)$ au point p, si à tout $\varepsilon > 0$ donné à l'avance, il correspond un $\delta > 0$ tel que, pour tout couple de points q, r, *de part et d'autre de* p, dont la distance à p est $< \delta$, nous ayons $|\varkappa(p, q, r) - \varkappa(p)| < \varepsilon$.

[2] M. Pauc a remarqué que quand $f'(x_0)$ et les limites des deux expressions mentionnées existent, ces deux limites sont nécessairement égales; si A désigne leur valeur commune, la courbure de M. Alt a comme valeur $\dfrac{|A|}{[1 + f'^2(x_0)]^{3/2}}$.

$f''(x_0)$ dans ce sens entraîne l'existence de $f'(x_0)$ et celle de la courbure de M. Alt qui a alors comme expression $\frac{|f''(x_0)|}{[1+f'^2(x_0)]^{3/2}}$ [1].

M. Pauc a démontré par ailleurs que dans un espace euclidien, si un continu k quelconque admet en un point p_0 une courbure de Alt, un voisinage de p_0 sur k est un arc rectifiable; ce qui permet l'énoncé suivant qui nous rapproche de la définition classique: Pour qu'un continu k d'un espace euclidien possède en un point p_0 une courbure de Alt $= \varkappa(p_0)$ il faut et il suffit qu'un voisinage de p_0 sur k soit un arc rectifiable, admettant une tangente t_0 en p_0, et qu'en se limitant aux points p où la tangente t existe, l'expression $\Delta\alpha : \Delta s$ ($\Delta\alpha =$ angle tt_0, $\Delta s =$ longueur de l'arc pp_0) ait une limite égale à $\varkappa(p_0)$ lorsque p tend vers p_0.

Donnons un exemple d'un arc possédant en un point une courbure de Alt sans posséder une courbure classique. Il suffit de considérer les points $p_n = \left(\frac{1}{n}, \frac{1}{n^2}\right)$ et $q_n = \left(\frac{-1}{n}, \frac{1}{n^2}\right)$, $n = 1, 2, \ldots$ ad inf.) (situés sur la parabole $y = x^2$) et la somme de deux lignes polygonales $p_1, p_2, p_3, \ldots, p_n, p_{n+1}, \ldots$ et $q_1, q_2, \ldots, q_n, q_{n+1}, \ldots$ complétée par le point 0. L'arc obtenu possède en ce dernier point une courbure au sens de M. Alt, égale à 2; il ne peut posséder une courbure classique dans ce point, car la fonction $y = f(x)$ représentant cet arc possède dans tout voisinage de 0, des points où $f'(x)$ n'existe pas. La dérivée seconde au sens classique n'est pas définie pour $x = 0$, tandis qu'elle l'est au sens plus large mentionné plus haut.

Au point de vue de la métrique interne (p. 362) les arcs ne présentent qu'un intérêt assez faible. Un arc D satisfait aux trois conditions mentionnées (p. 363) s'il est rectifiable et dans ce cas seulement. Or, en faisant correspondre aux couples de points d'un arc rectifiable quelconque leur distance interne, nous obtenons un espace D′ congruent à un segment dont la longueur est égale à celle de l'arc, donc un espace dont la courbure est 0 en chaque point.

Par contre, l'intérêt de la métrique interne devient prépondérant pour les espaces de dimension supérieure, et déjà pour

[1] Il s'ensuit que la valeur A, rencontrée plus haut, n'est autre que $|f''(x_0)|$.

les surfaces. Si D est une surface comme celles que l'on considère dans la géométrie différentielle, il correspond à chaque point p de D un nombre $k(p)$ appelé la courbure totale de D au point p, à savoir le produit des deux courbures principales des sections planes de D. Ce nombre, d'après un résultat célèbre de GAUSS, ne dépend que de la métrique interne de D; si D_1 et D_2 sont deux surfaces telles que les espaces convexes D_1' et D_2', portant les métriques internes de D_1 et D_2, soient congruents, alors les nombres $k(p_1)$ et $k(p_2)$ sont toujours égaux pour deux points p_1 de D_1 et p_2 de D_2 qui se correspondent par cette congruence. On connaît, d'ailleurs, les nombreuses définitions de $k(p)$ se basant sur la métrique interne de D, dues à GAUSS et à ses successeurs. Mais n'est-il pas possible, demandais-je, de définir cette courbure par la simple considération des quadruplets de points de D, comme nous venons de faire pour la courbure des courbes ?

La plus simple généralisation de cette dernière qui se présente, ne mène pas à la solution du problème, même dans le cas où D est un sous-ensemble d'un espace euclidien; car si l'on fait alors correspondre à quatre points de D le rayon de la sphère circonscrite et si l'on fait un passage à la limite analogue à celui que nous avons employé pour les courbes, on obtient un nombre qui ne dépend pas uniquement de la métrique interne de D.

M. WALD a cependant réussi récemment à résoudre le problème au moyen de l'idée suivante [1]: Il dit que l'espace distancié D' a la *courbure de surface* $\varkappa(p)$ au point p, lorsqu'aucun voisinage de p n'est linéaire et lorsqu'à tout $\varepsilon > 0$ il correspond un $\delta > 0$ tel que tout quadruplet de points q, r, s, t de D', dont les distances à p sont $< \delta$, soit congruent à un quadruplet de points de S_k avec $|k - \varkappa(p)| < \varepsilon$; S_k désigne la surface d'une sphère à trois dimensions de courbure totale $k = \frac{1}{r^2}$ (r rayon réel ou imaginaire) portant la métrique interne, donc où l'on a pris comme distance de deux points p' et p'' la longueur du plus petit arc de grand cercle passant par p'

[1] Cf. *C. R.*, 201, p. 918. Voir aussi: *Ergebnisse e. mathem. Kolloquiums*, 6, p. 29 et cahier 7, p. 24.

et p''. Si D′ est une surface comme celles que l'on considère en géométrie différentielle, la courbure totale $k(p)$ en tout point p est égale à la courbure de surface $\varkappa(p)$ de D′ au point p. La définition de WALD qui ne nécessite pas la représentation des points par des coordonnées, peut donc servir à introduire de façon bien naturelle et extrêmement simple la notion importante de courbure.

Les surfaces de GAUSS sont donc des espaces compacts et convexes admettant en chaque point une courbure de surface $\varkappa(p)$ au sens de M. WALD. Mais encore plus important et plus remarquable est, me semble-t-il, le théorème inverse démontré par M. WALD.

Tout espace distancié compact et convexe qui admet une courbure de surface en chaque point, est une surface de GAUSS. En se basant sur la seule hypothèse qu'un espace distancié général est compact, convexe et admet en chaque point une courbure de surface au sens de M. WALD, celui-ci peut démontrer que l'espace est localement homéomorphe à l'intérieur d'un cercle, que deux points assez voisins peuvent toujours être joints par un seul segment, qu'on peut introduire des angles et des coordonnées polaires ρ, φ, et que la longueur d'un petit arc

$$\rho = \rho(t)\,,\ \varphi = \varphi(t) \qquad (0 \leqq t \leqq 1)$$

$\rho(t)$ et $\varphi(t)$ étant deux fonctions dérivables de t, est égale à

$$\int_0^1 \left[\rho'^2(t) + G^2(\rho, \varphi)\,\varphi'^2(t)\right]^{\frac{1}{2}} dt\,,$$

où $G(\rho, \varphi)$ est la solution de l'équation différentielle

$$\frac{\partial^2 G}{\partial \rho^2} = -\varkappa(\rho, \varphi)\,.\,G(\rho, \varphi)$$

satisfaisant aux conditions $G(0, \varphi) = 0$, $\frac{\partial^2 G}{\partial \rho}(0, \varphi) = 1$ et où $\varkappa(\rho, \varphi)$ désigne la courbure de surface de D′ au point (ρ, φ). On a donc le théorème fondamental suivant:

Pour qu'un espace distancié compact soit une surface de

Gauss, il est nécessaire et suffisant qu'il soit convexe et admette une courbure de surface en chaque point.

Ce théorème montre que la géométrie des distances fournit une nouvelle base à l'étude des propriétés métriques locales des surfaces.

V. — Géométrie des distances et calcul des variations.

Soit donné un espace distancié. Un ensemble fini ordonné de points $p_1, p_2, \ldots, p_k$ est appelé *polygone* (et polygone *fermé* si $p_1 = p_k$). Nous considérons des courbes continues dans l'espace donné. C étant l'image continue d'un intervalle $\alpha \leq t \leq \beta$, nous appelons sous-polygone de C l'image $P = \{p_1, p_2, \ldots, p_k\}$ (par la même représentation) d'un ensemble fini ordonné de nombres $\gamma_1 < \gamma_2 < \ldots < \gamma_k$ de $[\alpha, \beta]$. Par ν (P) nous désignons le plus grand des nombres $\gamma_{i+1} - \gamma_i$.

Soit donnée une fonction $F(p; q, r)$ des triplets de points $(q \neq r)$. Cette fonction permet l'introduction d'une nouvelle métrique si nous prenons pour chaque couple de points q, r, au lieu de la distance $\overline{qr}$ qu'ils ont dans D, le nombre $d(q, r) = F(q; q, r) \cdot \overline{qr}$ si $q \neq r$, et $d(q, q) = 0$. Soit D (F) l'espace à distances réelles qu'on obtient ainsi. En attribuant, étant donné un point p, à q et r la distance $d_p(q, r) = F(p; q, r)\overline{qr}$ si $q \neq r$, et $d_p(q, q) = 0$ nous obtenons un autre espace à distances réelles que nous appellerons l'espace tangent $D_p(F)$ de D (F) au point p. Pour le polygone P nous considérerons outre sa longueur $l(P) = \Sigma p_i p_{i+1}$ dans D, ses longueurs dans D (F) et dans $D_p(F)$, à savoir les nombres

$$\lambda(P, F) = \sum_{i=1}^{k-1} F(p_i ; p_i, p_{i+1}) \cdot \overline{p_i p_{i+1}} .$$

et

$$\lambda_p(P, F) = \sum_{i=1}^{k-1} F(p ; p_i, p_{i+1}) \overline{p_i p_{i+1}} .$$

La borne supérieure finie ou infinie des nombres $l(P)$ pour

tous les sous-polygones de C est appelée la *longueur* $l(\mathrm{C})$ de C. On dit que C est *rectifiable* si $l(\mathrm{C})$ est fini.

Imposons à la fonction F les conditions suivantes pour chaque courbe rectifiable C:

1. F (p; q, r) *est bornée pour tous les triplets* p, q, r *d'un voisinage de* C.

2. *L'ensemble de tous les points* p *de* C *pour lesquels l'oscillation de* F *est* > 0, *est de mesure linéaire* 0, c'est-à-dire il peut être couvert par des sphères, en nombre fini ou infini, dont la somme des diamètres soit aussi petite que l'on voudra. Par l'oscillation $\sigma(p)$ de F au point p nous entendrons la borne supérieure de tous les nombres σ pour lesquels il existe dans tout voisinage de p quatre points p', p'', q, r tels que $|\mathrm{F}(p'; q, r) - \mathrm{F}(p''; q, r)| \geqq \sigma$. Les points pour lesquels $\sigma(p) > 0$, sont les points de discontinuité de F par rapport à la première des trois variables.

3. *L'ensemble des points* p *de* C *pour lesquels* $\tau_{\mathrm{C}}(p)$ *est* > 0 *est de mesure linéaire* 0. Par $\tau_{\mathrm{C}}(p)$ nous entendons la limite pour $\rho \to 0$ de la borne supérieure des nombres $\tau(q)$ pour les points q dont la distance à p est $< \rho$. Nous désignons ici par $\tau(q)$ la borne supérieure des nombres τ pour lesquels il existe un polygone $\mathrm{P} = \{p_1, p_2, \ldots, p_n\}$ avec $p_1 = q$ et tel qu'on ait

$$\lambda_p(\mathrm{P}, \mathrm{F}) \leqq d(p_1, p_n) - \tau\,|d(p_1, p_n)|\,.$$

On a $\tau(p) \geqq 0$ pour tout point p et $\tau(p) = 0$ dans le cas et seulement dans le cas où

$$\mathrm{F}(p; p, q)\,\overline{pq} + \mathrm{F}(p; q, r)\,\overline{qr} \gtreqless \mathrm{F}(p; q, r)\,\overline{pr}$$

pour tout couple q, r.

4. $\tau_{\mathrm{C}}(p)$ *est fini en tout point* p *de* C.

5. *Pour tout polygone fermé* P *qui est assez voisin d'un point* p *de discontinuité de* F, *on a* $\lambda(\mathrm{P}, \mathrm{F}) \geqq 0$.

Ces hypothèses sur la fonction F étant admises on a le théorème suivant:

Pour chaque suite $\mathrm{P}_1, \mathrm{P}_2, \ldots$ *de sous-polygones d'une courbe continue rectifiable pour laquelle on a lim* $\nu(\mathrm{P}_n) = 0$, les nombres

$\lambda(P_n, F)$ *convergent vers un nombre fini. Cette limite est la même pour toutes les suites de sous-polygones de* C *assujetties à la condition que* $\nu \to 0$. *Nous la désignerons par* $\lambda(C, F)$. *Pour chaque* $\lambda > 0$ *donné,* $\lambda(C, F)$ *est une fonctionnelle semicontinue inférieurement sur l'ensemble de toutes les courbes de longueur* $\leqq \lambda$. *Si, d'ailleurs, pour chaque* $\lambda > 0$ *donné, les longueurs de toutes les courbes* C *pour lesquelles* $\lambda(C, F) \leqq \lambda$, *sont bornées, chaque classe complète de courbes rectifiables contient une courbe pour laquelle la fonctionnelle* $\lambda(C, F)$ *atteint son minimum.*

Quel est l'avantage de cette généralisation des théorèmes d'existence du calcul des variations ? Tout d'abord, la forme métrique met en évidence que l'hypothèse de la nature cartésienne de l'espace (à savoir la représentation des points par un groupe de coordonnées), hypothèse considérée jusqu'alors comme base des problèmes du calcul des variations, n'est pas liée à l'essence du problème. Dans tous les espaces distanciés se posent des questions concernant l'extremum des fonctionnelles de courbes, données par des intégrales curvilignes. Mais même en l'appliquant aux espaces euclidiens, donc au cas classique, notre théorème, outre une grande simplicité dans les démonstrations, semble apporter un progrès [1], car les conditions imposées à F même dans les profonds théorèmes de M. Tonelli sont plus restrictives que les nôtres. Considérons, pour nous en rendre compte, nos cinq hypothèses sur F dans le cas où l'espace distancié donné est un espace euclidien à n dimensions [2].

Dans les problèmes classiques, il correspond à chaque point $p = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ de cet espace (ou d'un certain domaine) et à chaque direction $\delta = (x_1' : x_2' : \ldots : x_n')$ un nombre

$$F(p, \delta) = F(x_1, \ldots, x_n ; x_1', \ldots, x_n') = \frac{1}{k} F(x_1, \ldots, x_n ; kx_1', \ldots, kx_n')$$

$$\text{pour} \quad k > 0 .$$

[1] Je viens d'apprendre que dans le cas euclidien M. Bouligand a récemment (*Mém. de la Soc. Roy. des Sc. de Liége*, 3me sér., t. 19) considéré, pour les fonctions continues et quasi-régulières partout, des sommes riemaniennes ainsi que nous venons de le faire dans le cas général, et a ainsi obtenu une démonstration très élégante d'un théorème d'existence. M. Bouligand, tout en se bornant aux fonctions positivement définies, s'est bien aperçu de la portée de sa méthode. La nôtre était en germe dans des recherches sur la longueur des arcs (*Mathem. Annalen*, 103) et nous l'avons exposée dans un article de *Fundam. Mathem.*, 25, et dans une note aux *C. R. Paris*, 21.X.1935.

[2] Cf. ma note, *C. R.*, 200, p. 705.

Pour appliquer notre théorie posons pour trois points p, q, r donnés $(q \neq r)$ $F(q; q, r) = F(p, \delta_{qr})$ où δ_{qr} désigne la direction de la demi-droite partant de q et passant par r. Les hypothèses 1 et 2 sont réalisées si, pour chaque courbe rectifiable C, la fonction $F(p, \delta_{qr})$ est *bornée dans un voisinage de* C et *continue sur* C *sauf pour les points d'un ensemble de mesure linéaire* 0, c'est-à-dire d'un ensemble qu'on peut recouvrir au moyen d'une suite dénombrable de sphères dont la somme des diamètres est arbitrairement petite. La quasi-régularité $\tau(p) = 0$ de la fonction F au point p (qui par la condition 3 est postulée pour presque tous les points p) s'exprime maintenant par l'inégalité suivante valable pour chaque triplet de points p, q, r:

$$F(p, \delta_{pq})\,\overline{pq} + F(p, \delta_{qr})\,\overline{qr} \geq F(p, \delta_{pr})\,\overline{pr}\,.$$

Pour voir la signification de cette propriété, nous désignons, pour chaque droite orientée δ passant par p, par e_δ le point de δ dont la distance à p est égale à $\frac{1}{|F(p, \delta)|}$ et qui est situé sur le rayon positif ou négatif de δ suivant le signe de $F(p, \delta)$, c'est-à-dire nous construisons l'*indicatrice* E de F au point p dans le sens où, pour des fonctions définies, M. Carathéodory l'a introduite. Pour que F soit quasi-régulière au point p, il faut et il suffit alors, comme l'a démontré M. Alt, qu'il existe une collinéation π qui transforme l'hypersurface indicatrice E du point p, c'est-à-dire l'ensemble de tous les points e_δ, en une surface convexe à $n - 1$ dimensions π (E) telle que $\pi(p)$ soit situé à l'intérieur de π (E) et que $\pi(e_\delta)$ soit situé sur le semi-rayon positif de $\pi(\delta)$ par rapport à $\pi(p)$. Il est clair que la régularité de F au point p signifie la convexité projective de l'hypersurface indicatrice E du point p. Si $F(p, \delta)$ est non négative pour chaque droite δ passant par p, la convexité projective n'est rien d'autre que la convexité au sens ordinaire.

Remarquons en terminant que la méthode exposée permet aussi[1] d'étendre le champ des courbes de comparaison et l'introduction des courbes non rectifiables dans le calcul des variations[2].

---

[1] Cf. ma Note *C. R. Paris*, t. 202, p. 1648.

[2] Je tiens à remercier M. Pauc de son aide dans la rédaction de cet article et pour plusieurs remarques qu'il m'a communiquées à ce sujet.