

## II. — La théorie de la convexité et ses relations avec LA GÉOMÉTRIE AXIOMATIQUE.

Objekttyp: **Chapter**

Zeitschrift: **L'Enseignement Mathématique**

Band (Jahr): **35 (1936)**

Heft 1: **L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE**

PDF erstellt am: **09.08.2024**

### **Nutzungsbedingungen**

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern. Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

### **Haftungsausschluss**

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

Le résultat énoncé plus haut contient donc comme cas particulier le théorème suivant concernant l'espace euclidien réel  $E_n (= E_{n,n})$ :

*Pour qu'un espace  $E$  à distances non négatives et distinguant métriquement les points, soit congruent à un sous-ensemble de  $E_n$ , il est nécessaire et suffisant que l'on ait*

$$(\Delta_0^{n+3}) \quad \Delta(p_1, p_2, \dots, p_{n+3}) = 0 \text{ pour tout système de } n + 3 \text{ points de } E,$$

$$(\Delta_0^{n+2}) \quad \Delta(p_1, p_2, \dots, p_{n+2}) = 0 \text{ pour tout système de } n + 2 \text{ points de } E,$$

$$(\Delta^k) \quad \text{sgn } \Delta(p_1, p_2, \dots, p_k) = (-1)^{k+1} \text{ ou } 0$$

*pour tout système de  $k$  points de  $E$ , où  $k = 2, 3, \dots, n + 1$ .*

Remarquons qu'un espace  $E$  contenant plus de  $n + 3$  points et satisfaisant aux conditions  $(\Delta^k)$  pour  $k = 2, 3, \dots, n + 1$  et à  $(\Delta_0^{n+2})$  satisfait *eo ipso*<sup>1</sup> à la condition  $(\Delta_0^{n+3})$ . Pour qu'un espace séparable  $E$  soit congruent à un sous-ensemble de l'espace de HILBERT il faut et il suffit que les conditions  $(\Delta^k)$  soient satisfaites pour chaque entier  $k$ .

## II. — LA THÉORIE DE LA CONVEXITÉ ET SES RELATIONS AVEC LA GÉOMÉTRIE AXIOMATIQUE.

Passons à l'étude de propriétés plus géométriques de l'espace et de ses sous-ensembles. Dans ce but nous considérons un ensemble d'éléments quelconques tel qu'à tout couple d'éléments (« points »)  $p, q$  il corresponde un nombre réel  $\overline{pq}$  (« distance » de  $p$  et  $q$ ) qui satisfait à la condition  $\overline{pp} = 0$  pour tout  $p$  et à l'inégalité triangulaire  $\overline{pq} + \overline{qr} \geq \overline{pr}$  pour chaque triplet de points. Nous appellerons un tel ensemble un *espace triangulaire*. Particulièrement importants sont les espaces triangulaires à distances symétriques, non négatives, et qui distinguent métri-

<sup>1</sup> Un espace à distances complexes satisfaisant à la condition  $(\Delta_0^{n+2})$  ne satisfait pas nécessairement à la condition  $(\Delta_0^{n+3})$ . On trouvera une étude des systèmes de  $n + 3$  points non congruents à  $n + 3$  points de  $E_n$  bien que  $n + 2$  quelconques de leurs points soient congruents à  $n + 2$  points de  $E_n$  dans mon mémoire *Mathem. Annalen*, 100, p. 124. J'ai appelé de tels systèmes *pseudo-euclidiens*.

quement les points, c'est-à-dire tels que  $\overline{pq} = \overline{qp} > 0$  si  $p \neq q$  et  $pp = 0$ ; ou bien, ce qui revient au même, tels que chaque triplet de points soit congruent à un triplet de points du plan (à un triangle euclidien)<sup>1</sup>. L'introduction de ces espaces est due à M. FRÉCHET. On les appelle espaces métriques ou, d'après M. BOULIGAND, espaces distanciés. Comme exemples d'espaces triangulaires nous avons les espaces euclidiens de toutes dimensions et l'espace de Hilbert.

Il est bien naturel lorsqu'on a une inégalité d'étudier les cas où elle devient une égalité. Dans le cas d'un espace euclidien la relation  $\overline{pq} + \overline{qr} = \overline{pr}$  a lieu pour trois points  $p, q, r$  distincts deux à deux, lorsque  $q$  est situé sur le segment joignant  $p$  et  $r$ , donc entre  $p$  et  $r$ , et seulement dans ce cas. Posons donc comme définition pour un espace distancié général qu'un point  $q$  est point *intermédiaire* entre  $p$  et  $r$ , ou plus simplement est *entre*  $p$  et  $r$  si  $p \neq q \neq r$  et  $\overline{pq} + \overline{qr} = \overline{pr}$ . Cette notion ne jouit pas, dans les espaces généraux, de toutes les propriétés qu'elle possède sur la ligne droite. Considérons par exemple l'espace distancié constitué par quatre points  $p, q, r, s$  ayant les distances  $\overline{pq} = \overline{qr} = \overline{rs} = \overline{sp} = 1$ ,  $\overline{pr} = \overline{qs} = 2$ . Il est clair que  $q$  est entre  $p$  et  $r$ , et que  $r$  est entre  $q$  et  $s$ , sans que  $q$  ou  $r$  soient entre  $p$  et  $s$ . La relation de point intermédiaire a cependant assez d'affinités avec la relation bien connue sur la ligne droite pour que la dénomination de point situé « entre » deux autres soit justifiée. Elle jouit notamment des propriétés suivantes: Si  $q$  entre  $p$  et  $r$ , alors  $q$  entre  $r$  et  $p$ , mais  $r$  non entre  $p$  et  $q$ . Si  $q$  entre  $p$  et  $r$ , et  $r$  entre  $p$  et  $s$ , alors  $q$  entre  $p$  et  $s$ , et  $r$  entre  $q$  et  $s$ . L'ensemble constitué par  $p$  et  $q$  et leurs points intermédiaires est fermé.

Nous appelons *convexe* un sous-ensemble d'un espace distancié qui contient pour chaque couple de points différents  $p$  et  $r$  au moins un point  $q$  situé entre  $p$  et  $r$ . On a alors le théorème suivant: *Un sous-ensemble fermé convexe d'un espace distancié complet contient pour tout couple de points distincts  $p$  et  $q$  un segment qui les joint, c'est-à-dire un sous-ensemble contenant*

<sup>1</sup> Pour un espace à distances non négatives l'inégalité triangulaire équivaut à la condition ( $\Delta^3$ ).

$p$  et  $q$  et congruent à un segment de la ligne droite au sens ordinaire du mot dont la longueur est égale à la distance  $pq$ <sup>1</sup>. On déduit immédiatement de ce théorème qu'un sous-ensemble fermé d'un espace euclidien est convexe s'il est convexe au sens classique de MINKOWSKI et seulement dans ce cas. Remarquons d'ailleurs que dans un espace distancié convexe général il peut arriver que deux points puissent être joints par plusieurs segments. La surface d'une sphère à trois dimensions dans laquelle nous prenons comme distance la longueur du plus petit arc du grand cercle qui les joint, nous en fournit un exemple. C'est un espace convexe et complet, qui contient pour tout couple de points diamétralement opposés une infinité de segments qui les joignent.

Du point de vue topologique la notion de convexité est sinon identique du moins très voisine de celle de connexité et de connexité locale. Nous n'avons pas résolu la question de savoir si l'hypothèse — pour un espace distancié compact — d'être connexe et localement connexe est non seulement nécessaire mais encore suffisante pour que l'espace soit homéomorphe à un espace distancié convexe. Indiquons trois conditions qui sont suffisantes pour qu'un espace distancié soit homéomorphe à un espace convexe: 1° Deux points quelconques peuvent être joints par un arc de longueur finie. 2°  $p$  et  $q$  étant deux points distincts, la borne inférieure des longueurs de tous les arcs joignant  $p$  et  $q$ , est  $> 0$ . 3° A tout  $\epsilon > 0$  donné à l'avance, il correspond un  $\delta > 0$  tel que deux points quelconques dont la distance est  $< \delta$  puissent être joints par un arc de longueur  $< \epsilon$ . En faisant alors correspondre à tout couple de points  $p, q$  de  $D$  la borne inférieure des longueurs de tous les arcs joignant  $p$  et  $q$  ou, comme nous dirons, la *distance interne* de  $p$  et  $q$ , nous obtenons un espace distancié convexe  $D'$  homéomorphe à  $D$ . (Les segments de  $D'$  correspondent aux arcs géodésiques de  $D$ .)<sup>2</sup>

<sup>1</sup> Les notions de point intermédiaire et de convexité et leurs théories sont développées dans mon mémoire *Mathem. Annalen*, 100, p. 75. Une nouvelle démonstration de l'existence d'un segment sous les conditions mentionnées a été donnée par M. ARON-SZAJN, *Ergebnisse e. mathem. Kolloquiums*, 6, p. 45.

<sup>2</sup> Cf. mon mémoire dans le *Mathem. Annalen*, 100, p. 96. Cf. aussi HOPF und RINOW, *Comment Math. Helvet.*, 3.

La théorie de la convexité se relie à l'axiomatique de la géométrie élémentaire, en particulier aux Anordnungsaxiome de PASCH, HILBERT et de l'école américaine. L'étude des propriétés découlant de la notion de convexité permet, à partir de l'espace triangulaire complet, d'obtenir des espaces de plus en plus particularisés de ce point de vue, et finalement certaines caractérisations des espaces linéaires et euclidiens.

Nous dirons, pour esquisser ce chemin, qu'un ensemble dans un espace distancié est *extérieurement convexe* s'il contient, pour chaque couple de points  $p$  et  $q$ , au moins un point  $r$  tel que  $q$  soit entre  $p$  et  $r$ . Un ensemble fermé, à la fois convexe et extérieurement convexe dans un espace complet contient pour chaque couple de points différents une « droite » qui les joint, c'est-à-dire un sous-ensemble contenant  $p$  et  $q$ , congruent avec une droite au sens ordinaire du mot. Pour que tout couple de points distincts d'un espace complet, convexe et extérieurement convexe détermine une droite et une seule les joignant, il faut et il suffit que l'espace jouisse de la propriété suivante que j'ai appelée *propriété des deux triplets*: Etant donné quatre points distincts deux à deux, l'existence de deux triplets linéaires entraîne la linéarité des deux autres triplets. (Nous dirons que le triplet  $p, q, r$  est *linéaire* lorsqu'un de ses points est situé entre les deux autres.)

En ajoutant les conditions d'être complet, convexe et extérieurement convexe aux conditions qui caractérisent les espaces distanciés congruents aux sous-ensembles des espaces euclidiens réels (se reporter au Chapitre I), nous obtenons la caractérisation des espaces euclidiens réels eux mêmes parmi les espaces distanciés. Mentionnons encore que le point de départ de ces recherches fut un théorème de M. BIEDERMANN<sup>1</sup> que nous énoncerons ici de la façon suivante: Pour qu'un espace distancié compact et convexe soit congruent à un segment, il faut et il suffit qu'il contienne plus d'un point et que tout triplet de ses points soit linéaire.

Pour parvenir graduellement des espaces convexes et extérieurement convexes aux espaces linéaires et euclidiens il suffit

<sup>1</sup> Cf. *Mathem. Annalen*, 100, p. 114.

d'exclure l'existence dans l'espace de certaines singularités simples. Il s'agit des deux figures suivantes qui ne se rencontrent pas dans les espaces linéaires:

1. La *fourchette*: somme de trois segments  $pq$ ,  $qr$ ,  $qs$  n'ayant en commun deux à deux que le point  $q$  situé à la fois entre  $p$  et  $r$ , et entre  $p$  et  $s$ .

2. L'*étrier*: somme de quatre segments  $pq$ ,  $qr$ ,  $rs$ ,  $ps$  qui n'ont en commun que des extrémités et tels que  $s$  soit entre  $p$  et  $r$ , et  $r$  entre  $q$  et  $s$ .

Si les points  $q$  et  $r$  d'un étrier sont situés entre  $p$  et  $s$ , l'étrier est somme de deux segments de mêmes extrémités (à savoir de  $p$  et  $s$ ), et nous parlerons d'une *lentille*, par exemple: la somme de deux demi-grand-cercles d'une sphère. Notons deux configurations particulières intéressantes: 1° Le *cercle*, ensemble congruent à un cercle au sens ordinaire où l'on a pris comme distance de deux points la longueur du plus petit arc qui s'y termine. Le cercle constitue un étrier entre deux quelconques de ses points, il constitue plus particulièrement une lentille entre deux de ses points diamétralement opposés. 2° Le *trièdre convexe*, somme de trois segments  $pq$ ,  $qr$ ,  $qs$  n'ayant en commun deux à deux que le point  $q$  situé à la fois entre  $p$  et  $r$ , entre  $p$  et  $s$ , entre  $r$  et  $s$ .

Les espaces distanciés sont par définition des espaces  $E$  satisfaisant à la condition  $(\Delta^3)$ , c'est-à-dire des espaces  $E$  dont chaque triplet de points est congruent à un triangle euclidien. M. W. A. WILSON a récemment étudié<sup>1</sup> les espaces  $E$  satisfaisant aux conditions  $(\Delta^3)$  et  $(\Delta^4)$ , c'est-à-dire des espaces  $E$  dont chaque quadruplet de points est congruent à un tétraèdre euclidien — par analogie nous pourrions appeler ces espaces: espaces *tétraédraux* — et il a obtenu le résultat intéressant suivant: Pour qu'un espace séparable et complet soit congruent à un espace euclidien ou à l'espace de Hilbert il faut et il suffit qu'il soit convexe, extérieurement convexe et tétraédral. Renvoyons le lecteur en terminant à un mémoire intéressant sur la sphère à  $n$  dimensions par M. L. M. BLUMENTHAL<sup>2</sup>.

<sup>1</sup> Amer. Journ. of Math., 54.

<sup>2</sup> Amer. Journ. of Math., 57.