III. GÉOMÉTRIE DES DISTANCES ET ALGÈBRE DES VECTEURS.

Objekttyp: **Chapter**

Zeitschrift: **L'Enseignement Mathématique**

Band (Jahr): **35 (1936)**

Heft 1: **L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE**

PDF erstellt am: **10.08.2024**

III. — Géométrie des distances et algèbre des vecteurs.

Les conditions (Δ^k) et (Δ_0^k) du chapitre I étant de nature algébrique, les résultats de cette théorie permettent des applications dans le domaine de l'algèbre. Bornons-nous ici à mentionner les beaux résultats de M. L. M. Blumenthal sur les déterminants [1]. Nous allons entrer un peu plus dans le détail en ce qui concerne l'algèbre des vecteurs [2].

Désignons par *ensemble métrique de vecteurs* un ensemble V d'éléments de nature quelconque appelés vecteurs, tel qu'à tout couple v et w de ses éléments corresponde un nombre réel (vw) assujetti aux conditions

$$(\Gamma) \qquad (vw) = (wv)$$

$$(\Gamma') \qquad v \neq w \text{ implique } (vv) + (ww) \neq 2\,(vw).$$

Le nombre (vw) sera dit : *produit scalaire des vecteurs v et w.*

Etant donné k éléments $v_1, v_2, \ldots, v_k$ de V, nous introduirons leur déterminant de Gram $\Gamma\,(v_1, v_2, \ldots, v_k)$

$$\Gamma(v_1, v_2, \ldots, v_k) = \begin{vmatrix} (v_1 v_1) & (v_1 v_2) & \ldots & (v_1 v_k) \\ (v_2 v_1) & (v_2 v_2) & \ldots & (v_2 v_k) \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ (v_k v_1) & (v_k v_2) & \ldots & (v_k v_k) \end{vmatrix}$$

Un exemple d'ensemble métrique de vecteurs nous est fourni par la famille des vecteurs d'un espace euclidien à un nombre quelconque de dimensions, en entendant par produit scalaire de deux vecteurs le produit scalaire au sens habituel.

A quelles conditions un ensemble métrique de vecteurs V est-il isomorphe à un ensemble de vecteurs d'un espace euclidien à n dimensions E_n ? C'est-à-dire trouver les conditions pour qu'on puisse faire correspondre à tout élément de V un vecteur de E_n de façon que v' et w' étant les vecteurs homologues à deux

[1] *Bull. Amer. Math. Soc.*, 37, 38 et *Amer. Journ. Math.*, 56.

[2] On trouve la théorie suivante esquissée dans ma note: *Ergebnisse e. mathem. Kolloquiums*, 5, p. 27.

éléments v et w quelconques de V, on ait toujours $(vw) = (v' w')$. Voici un groupe de conditions à la fois nécessaires et suffisantes:

$$(\Gamma_0^{n+1}) \quad \Gamma(v_1 v_2, \ldots, v_{n+1}) = 0$$

pour tout système de $n+1$ vecteurs $v_1, v_2, \ldots, v_{n+1}$ de V.

$$(\Gamma_0^k) \quad \Gamma\, v_1, v_2, \ldots, v_k) \geqq 0$$

pour tout système de k ($k = 1, 2, \ldots, n$) vecteurs $v_1, v_2, \ldots, v_k$ de V.

De plus, dans le cas où V consiste en $n+2$ vecteurs exactement, il faut adjoindre aux conditions précédentes la condition

$$(\Gamma_0^{n+2}) \qquad \Gamma(v_1, v_2, \ldots, v_{n+2}) = 0 \,.$$

Pour démontrer ce théorème, il suffit de se reporter à ce qui a été fait dans le chapitre I. Posons comme carré de la distance de deux éléments v et w de V le nombre $\overline{wv}^2 = (vv) + (ww) - 2(vw)$. Nous définissons ainsi un espace E, soit V'; les conditions (Δ_1), (Δ_2) et (Δ_3) auxquelles doit satisfaire $\overline{vw}^2$ sont en effet des conséquences immédiates de (Γ) et (Γ'). Et la condition nécessaire et suffisante pour que V soit isomorphe à un ensemble de vecteurs de l'espace euclidien E_n (auxquels on a donné la même origine p_0) c'est que V' soit applicable sur l'ensemble des extrémités de ces vecteurs. On déduira alors de (Γ_0^{n+1}), (Γ^k) $(k = 1, 2, \ldots, n)$ les conditions (Δ_0^{n+2}) et (Δ^k) $(k = 2, 3, \ldots, n+1)$ en tenant compte de la relation

$$\Delta(p_0, p_1, \ldots, p_k) = (-2)^k\, \Gamma(v_1, v_2, \ldots, v_k)\,,$$

où v_i désigne le vecteur $\overrightarrow{p_0 p_i}$.

Dans un ensemble métrique de vecteurs satisfaisant à la condition (Γ^2) le carré de la distance de deux vecteurs est toujours non-négatif [1] et nous pourrons introduire la notion de

---

[1] On a

$$\Gamma(v_1, v_2) = \begin{vmatrix} (v_1 v_1) & (v_1 v_2) \\ (v_2 v_1) & (v_2 v_2) \end{vmatrix} = (v_1 v_1)(v_2 v_2) - (v_1 v_2)^2.$$

La condition (Γ^2) n'est autre que l'inégalité de Schwarz $(v_1 v_1)(v_2 v_2) \geqq (v_1 v_2)^2$. Cette condition entraîne l'inégalité $(vv) + (ww) \geqq 2(vw)$. Pour le montrer il suffit de prouver l'impossibilité de la relation $(vv) + (ww) < 2(vw)$. Or celle-ci élevée au carré impliquerait $(vv)^2 + 2(vv)(ww) + (ww)^2 < 4(vw)^2 \leqq 4(vv)(ww)$, d'où $(vv)^2 - 2(vv)(ww) + (ww)^2 < 0$, ce qui est évidemment impossible, le premier

vecteur intermédiaire. Nous dirons que le vecteur v est *entre* les vecteurs u et w lorsqu'on a:
ou bien

$$\Gamma(u, w) \neq 0, \quad \Gamma(u, v, w) = 0, \quad \Gamma(u, v) + \Gamma(v, w) = \Gamma(u, w)$$

ou bien

$$\Gamma(u, w) = 0, \quad \overline{uv} + \overline{vw} = \overline{uw},$$

en entendant par $\overline{xy}$ la détermination positive du radical $\sqrt{\overline{xy}^2}$.

L'ensemble de vecteurs V peut être appelé *convexe* et *extérieurement convexe* lorsqu'il contient pour tout couple d'éléments u et w au moins un élément v entre u et w, et au moins un élément x tel que w soit situé entre u et x. Pour qu'un ensemble de vecteurs V soit isomorphe à l'ensemble de tous les vecteurs de E_n il faut et il suffit qu'il soit complet, convexe et extérieurement convexe, que les déterminants de Gram soient nuls pour tout système de $n + 1$ vecteurs et non négatifs pour tout système en contenant moins de $n + 1$, et enfin qu'il existe n vecteurs dont le déterminant de Gram est $\neq 0$.

Un corollaire intéressant de notre théorème est que les opérations d'addition de deux vecteurs et de multiplication d'un vecteur par un nombre peuvent être définies dans un ensemble métrique de vecteurs. En d'autres termes, *pour développer l'algèbre des vecteurs il suffit de prendre comme point de départ la seule notion du produit scalaire* au lieu des trois opérations: addition, multiplication par un nombre et multiplication scalaire, qui ont servi de bases jusqu'à présent. En effet, étant donné deux vecteurs u et w et un nombre λ nous appellerons λu le vecteur u' tel que $\Gamma(u, u') = 0$ et $(uu') = \lambda(uu)$, et nous appellerons $u + v$ le vecteur w pour lequel $\Gamma(u, v, w) = 0$, $\Gamma\left(u, \frac{w}{2}\right) = \Gamma\left(v, \frac{w}{2}\right) = \frac{1}{2}\Gamma(u, v)$ si $\Gamma(u, v) \neq 0$ et $(ww) = (uw) + (vw)$ si $\Gamma(u, v) = 0$.

L'existence et l'unicité des vecteurs u' et w et les lois ordinaires de ces opérations d'addition et de multiplication par

---

membre étant égal à $[(vv) - (ww)]^2$. La condition (Γ^2) permet donc de préciser (Γ^1) sous la forme

$$v \neq w \text{ implique } (vv) + (ww) > 2(vw).$$

un nombre sont garanties si l'ensemble de vecteurs est complet convexe et extérieurement convexe et jouit des propriétés (Γ^k).

Les recherches de MM. Wilson et Blumenthal mentionnées à la fin du Chapitre II admettent de même une traduction dans le langage de l'algèbre des vecteurs. En particulier il découle du théorème de M. Wilson (p. 358), comme l'a remarqué M. Blumenthal, qu'un ensemble de vecteurs séparable et complet est isomorphe à un espace vectoriel euclidien ou hilbertien si les conditions

$$\Gamma\,(v_1\,,\,v_2) \geqq 0 \text{ pour tout couple } v_1,\ v_2 \text{ de vecteurs} \qquad (\Gamma^2)$$

$$\Gamma\,(v_1\,v_2\,,\,v_3) \geqq 0 \text{ pour tout triplet } v_1,\ v_2,\ v_3 \text{ de vecteurs} \qquad (\Gamma^3)$$

sont satisfaites ou, ce qui revient au même, si tout triplet de vecteurs est isomorphe à un triplet de vecteurs de E_n, résultat qui a été obtenu directement par MM. Fréchet, v. Neumann et Jordan [1].

IV. — La courbure dans la géométrie des distances et la géométrie différentielle.

Nous avons, dans les chapitres précédents, traité, en nous plaçant au point de vue de la géométrie des distances, des problèmes où l'espace et ses sous-ensembles interviennent globalement. Mais cette géométrie permet aussi l'étude des *propriétés locales* des variétés spatiales, et pénètre ainsi dans un domaine où a triomphé jusqu'alors brillamment et exclusivement la méthode analytique; cette méthode s'appliquait si bien à cette étude qu'on a fini par identifier la théorie des propriétés locales des figures avec la géométrie différentielle: application de l'analyse, surtout du calcul différentiel, aux modèles arithmétiques représentant les figures. Et même M. Bouligand qui a eu le mérite en créant sa Géométrie infinitésimale directe d'introduire l'analyse moderne, en particulier la théorie des fonctions de variable réelle, dans l'étude des propriétés géométriques locales — se borne à l'étude d'espaces où chaque point est (ou pourrait être) caractérisé par un système de coordonnées.

---

[1] *Annals of Mathem.*, 36, p. 705, p. 719.