VI

variétés d'espace et variétés de temps tombe: dans l'équation des cordes vibrantes ou des tuyaux sonores

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{1}{a^2}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 0 , \tag{9'}$$

les variables x et t jouent un rôle entièrement analogue.

VI

Ce cas de deux variables indépendantes dans lequel l'équation, supposée linéaire et hyperbolique, peut s'écrire sous la forme connue de Laplace

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + a\frac{\partial u}{\partial x} + b\frac{\partial u}{\partial y} + cu = \varphi(x , y) \tag{11}$$

a été serré de plus près au point de vue qui nous occupe [1]. La remarque initiale est celle de M. Picard [**33**_c_], d'après laquelle les données de Cauchy ne sont pas admissibles sur un arc de courbe le long duquel les deux coordonnées x, y ne sont pas toutes deux monotones. Si, par exemple, x est monotone, mais que y ait un maximum, on a une figure telle que celle qui est représentée fig. 1 et, dans ce cas, conformément à ce qui précède, les problèmes correctement posés sont des problèmes mixtes (données de Cauchy sur un des arcs partiels, une seule donnée en chaque point sur l'autre).

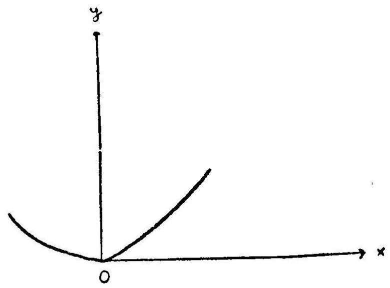

Fig. 1.

Un cas limite de la figure précédente est celui dans lequel, l'un des arcs partiels étant quelconque (quoique sans extremum de

[1] Certains des résultats dont nous allons parler ont été d'ailleurs étendus à des équations à plus de deux variables [**25**, **37**_a_, **37**_b_].

La récente théorie unitaire du champ de gravitation et d'électromagnétisme de M. Einstein [**15**] pose une question relative à la compatibilité de certains systèmes aux dérivées partielles. Cette question a été complètement élucidée par M. Cartan [**8**], mais dans l'hypothèse analytique. Il serait intéressant de se débarrasser de cette hypothèse, ainsi qu'on en doit présumer la possibilité, étant donné que les caractéristiques du système sont réelles.

x ou de y), l'autre serait remplacé par un segment de caractéristique issu d'une de ses extrémités et n'ayant pas d'autre point commun avec lui (fig.): ce cas, qui a fait tout particulièrement l'objet des études de M. Picard [**33**b] et aussi de M. Goursat [**18**b], n'est pas, au fond, distinct de celui dont nous venons de parler [1].

Mais ceci a conduit M. Goursat à envisager tous les cas de figure auxquels peuvent donner lieu deux arcs de lignes qui partent d'un même point A, chacun d'eux étant assujetti, pour son compte, à la condition de monotonie posée ci-dessus. Tout dépend des relations de position qui existent entre les deux arcs dont il s'agit et les caractéristiques issues du point A.

Si les deux arcs sont dans des angles opposés formés par les caractéristiques, la condition de monotonie est remplie sur la courbe entière formée par leur réunion, et on a le droit de se donner les données de Cauchy.

S'ils sont dans deux angles adjacents, on a la figure considérée il y a un instant, et qui donne lieu à un problème mixte.

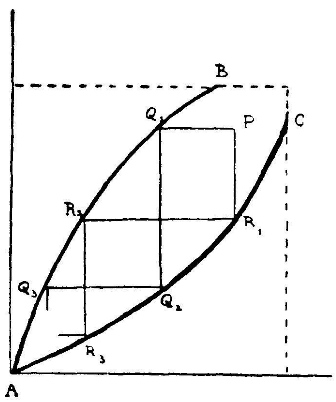

Fig. 2.

Mais il reste le cas (fig. 2) où les deux arcs sont dans un seul et même angle formé par les caractéristiques: on constate alors que la donnée admissible est unique sur chacun des arcs. Un tel problème ne correspond pas à une application physique, mais il se présente comme cas limite de problèmes physiquement posés (milieux à une dimension limités dans les deux sens). Il est déterminé [**18**c, **20**d] si on impose [2] la continuité au point A.

En combinant ces divers résultats on peut, comme l'a indiqué M. Picard dans son enseignement à la Sorbonne (1907) et dans

[1] Le cas d'une caractéristique se trouve participer des deux entre lesquels il est intermédiaire (lignes inclinées dans un sens ou dans l'autre par rapport à la caractéristique), grâce au fait que la donnée de u le long d'une caractéristique revient, pratiquement, à l'ensemble des deux données de Cauchy: la dérivée de u qui intervient dans les calculs est, en effet, celle qui est prise le long de la caractéristique elle-même.

[2] Si on renonce à cette condition, ainsi que l'ont fait quelques auteurs [**35**, **30**], il est aisé de voir que le problème devient largement indéterminé.

ses *Leçons sur quelques types simples d'équations aux dérivées partielles* [**33***d*], assigner les données que l'on peut choisir le long de contours plus compliqués, où chacune des deux coordonnées peut présenter un nombre arbitraire de maxima ou de minima.

VII

Un cas particulièrement intéressant est celui d'un contour fermé. Pour ne pas multiplier à l'excès les hypothèses possibles, bornons-nous au cas d'un contour convexe, ou tout au moins le long duquel chacune des coordonnées caractéristiques n'admet

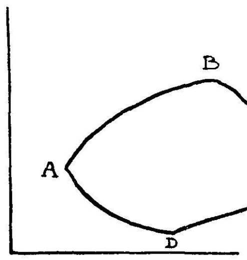

Fig. 3.

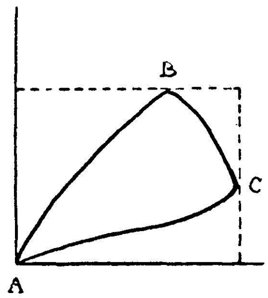

Fig. 3 *bis*.

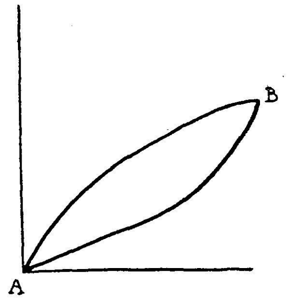

Fig. 3 *ter*.

qu'un seul maximum et un seul minimum. Avec M. Huber [**24**], employons le mot *angle*, en le détournant de son sens habituel, pour désigner l'un des points qui correspondent à de tels maxima ou minima. Notre contour sera donc en général un quadrangle ABCD (fig. 3), mais pourra aussi se réduire à un triangle ABC (fig. 3*bis*) ou même à un biangle AB (fig. 3*ter*). Dans le premier cas, les résultats généraux montrent qu'une solution de l'équation est déterminée si on se donne:

les données de Cauchy sur l'un des arcs partiels, BC, par exemple;
une seule donnée sur les deux arcs adjacents AB, CD;
rien sur le quatrième arc AD.

Une question se pose alors d'elle-même. Peut-on, le long d'un tel contour fermé, se poser pour l'équation (11) le problème qui intervient dans le cas elliptique, à savoir le problème de Dirichlet ?