Zeitschrift: L'Enseignement Mathématique

Herausgeber: Commission Internationale de l'Enseignement Mathématique

Band: 35 (1936)

Heft: 1: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE

Artikel: ÉQUATIONS AUX DÉRIVÉES PARTIELLES Les conditions définies en général. — Le cas hyperbolique

Autor: Hadamard, J.

Kapitel: XI.

DOI: https://doi.org/10.5169/seals-27304

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Mehr erfahren

Conditions d'utilisation

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. En savoir plus

Terms of use

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. Find out more

Download PDF: 11.07.2025

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, https://www.e-periodica.ch

où on reconnaît, aux premiers membres, les premiers membres de l'équation de monogénéité de Cauchy et où α, β, γ, δ sont des fonctions continues définies dans un certain domaine convexe D. Moyennant une définition convenablement précisée de ce qu'on doit entendre par solution du système, on peut démontrer qu'une telle solution ne peut admettre ni un zéro d'ordre de multiplicité infini à l'intérieur de D, ni une infinité de zéros ayant un point d'accumulation intérieur à D. Il est donc en particulier impossible que u et v s'annulent simultanément en tous les points d'une ligne intérieure au domaine en question [1].

Le problème est donc élucidé d'une manière satisfaisante pour les équations à deux variables indépendantes: malheureusement, les méthodes de MM. Hans Lewy et Carleman sont, par essence, limitées à ce cas, puisqu'elles reposent sur la distinction des caractéristiques en deux familles (réelles ou imaginaires) distinctes [2].

XI.

Dans toutes les étapes que nous venons de passer en revue, l'Analyse n'a pu progresser, conformément aux vues classiques de Poincaré, qu'en se laissant constamment guider par l'interprétation physique. Point de résultats où, au fond, la théorie pure et l'application concrète n'aient été solidaires l'une de l'autre et n'aient marché du même pas.

Il commence à en être autrement dans certaines recherches récentes. Il est d'abord un problème posé par l'application mécanique et où les principes généraux posés dans ce qui précède paraissent tomber en défaut, sans qu'on voie bien nettement quant à présent de quelle manière ils devront être complétés ou corrigés: c'est celui des marées, tel que le

---

1 La méthode met également en évidence la propagation par ondes, c'est-à-dire le fait que la valeur de l'inconnue en un point voisin de la ligne qui porte les données dépend uniquement de ce que sont ces données le long d'un *certain arc* de cette ligne.

2 Le cas linéaire, pour relativement classique qu'il soit, appellerait de nouvelles recherches. On sait que la démonstration d'unicité s'y fait par transformation d'intégrales de domaines en intégrales de frontières. Mais les intégrales utilisées ne sont pas les mêmes pour les problèmes elliptiques et pour les problèmes mixtes hyperboliques [**45**] et cette circonstance entraîne, en particulier, des difficultés lorsqu'on veut appliquer des méthodes de ce genre à des équations d'ordre supérieur et de type composite [**20j**].

traitent MM. M. Brillouin et J. Coulomb. Une masse liquide étant en rotation, soit [**5**] autour d'un noyau sphérique solide, soit [**6**] dans un récipient cylindrique de révolution et soumise à une force perturbatrice périodique, les oscillations forcées ainsi engendrées dépendent d'une équation aux dérivées partielles de la forme

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} - \frac{4\omega^2 - \theta^2}{\theta^2} \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = 0 , \tag{18}$$

ω désignant la vitesse angulaire de rotation et θ la pulsation de la force perturbatrice. On voit que, suivant la grandeur relative de ces deux quantités ω et θ, l'équation peut être du type elliptique ou du type hyperbolique. Dans le premier cas, on a bien affaire à un des problèmes que nous avons mentionnés (problème mixte elliptique) mais ces mêmes données aux limites ne cadrent plus avec nos principes généraux lorsque l'équation devient hyperbolique, et il y a là une sorte de paradoxe qui demande à être élucidé.

Voici maintenant des problèmes que les géomètres ont pu traiter au point de vue qui nous occupe, sans avoir à leur disposition, pour faire prévoir le résultat, une application concrète. Nous avons considéré, pour une équation du type hyperbolique, des données formées par deux arcs *issus* d'un même point (fig. 1, 2) et indiqué ce que doivent être ces données suivant l'orientation relative des arcs en question et des caractéristiques issues de leur point commun. Or on sait aujourd'hui traiter [**25***b*, **28**] le cas de deux arcs ayant non plus une extrémité commune, mais (fig. 8) un point *intérieur* commun. Une seule donnée en chaque point convient alors et on verra, par exemple, dans un travail d'E. E. Levi [**25***k*] et dans celui de M. Mason [**28**], comment les résultats paraissent dépendre d'une façon beaucoup moins étroite de l'orientation relative des arcs donnés et des caractéristiques. Une étude analogue a été faite pour le troisième ordre par M. Sjöstrand [**37***c*].

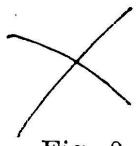

Fig. 8.

Peut-on, d'autre part, instituer des théories et des méthodes de calcul communes aux trois types d'équations ? Tout ce qui précède conduirait, au contraire, à les considérer comme relevant

de théories entièrement séparées. On est cependant arrivé, dans ces dernières années, à s'affranchir de cette nécessité. Les recherches dont nous voulons parler reposent sur l'emploi de la transformation de Laplace, transformation qui fait correspondre à une fonction $u(x, y, t)$ une nouvelle fonction des deux premières variables x, y et d'une variable auxiliaire positive τ définie par la formule

$$P(x, y, \tau) = \int_0^\infty u(x, y, t) e^{-\tau t} dt . \tag{19}$$

M. Doetsch a, comme on sait, traité d'une manière très approfondie cette transformation et, comme il l'exposera dans une des conférences qui vont suivre, montré le parti important qu'on en peut tirer pour l'étude de l'équation de la chaleur. Mais, d'autre part, il a constaté [**11**] qu'une méthode tout analogue s'applique à des problèmes de propagation télégraphique qui relèvent du cas hyperbolique. Or, plus récemment, M. Picone [**34**] est allé plus loin et, avec le même point de départ, a développé une théorie qui, presque jusqu'à la fin des calculs, s'applique indifféremment aux trois cas.

Ces résultats — auxquels on peut toutefois reprocher d'impliquer une hypothèse sur l'allure de la fonction u à l'infini [1], afin d'assurer l'existence de l'intégrale (19) — ouvrent, dans le sujet qui nous occupe, la voie à des recherches ultérieures. On peut espérer obtenir dans la même voie la réponse à des questions non encore résolues, telles que celle des équations du type hyperbolique non normal [**9**, **21**], pour lesquelles aucun système de données aux limites (non analytiques) propres à déterminer une solution n'a pu être indiqué jusqu'ici.

QUELQUES INDICATIONS BIBLIOGRAPHIQUES

1. S. Bernstein. *Communications de la Soc. Math. Kharkow*, 1908 (en russe).

2. H. Block. *Arkiv för Mat. Astr. och. Fys.*, 1911, tome VII.

---

1 On connaît, par ailleurs, les conditions à l'infini que l'on est conduit à poser dans le problème de Dirichlet et, de même dans les problèmes mixtes tant elliptiques qu'hyperboliques. Mais il y a lieu de mentionner une condition toute nouvelle de cette nature, l'« Ausstrahlungsbedingung », introduite par M. Sommerfeld [**39***b*] et qui exprime qu'une fonction de la forme $u(x, y, z)\, e^{ikt}$ représente un rayonnement se propageant tout entier vers l'extérieur.