LE PROBLÈME DE DIRICHLET DANS LE CAS LE PLUS GÉNÉRAL

LE PROBLÈME DE DIRICHLET DANS LE CAS LE PLUS GÉNÉRAL [1]

PAR

M. Florin VASILESCO (Paris).

I. — LE PROBLÈME DE DIRICHLET CLASSIQUE.

Le problème de Dirichlet concerne les solutions de l'équation de Laplace. Ce n'est que par extension que l'on a désigné par ce nom un problème analogue pour les solutions d'autres équations du type elliptique. De cette extension nous dirons quelques mots à la fin de cette conférence.[2]

Comme on le sait, on désigne par le nom de fonction harmonique, toute solution de l'équation de Laplace. Pour fixer les idées, nous emploierons ici le langage de l'espace à trois dimensions. On verra, d'ailleurs, que les récents progrès réalisés dans l'étude de ce problème sont dus à des notions d'origine physique, et c'est là une autre raison d'employer ce langage. Le cas de l'espace à deux dimensions est, en général, plus simple et entraîne des modifications faciles à faire.

Conformément au sous-titre de ce colloque, ainsi qu'au sujet de cette conférence, on doit se demander quelles sont les conditions propres à déterminer les solutions de l'équation de Laplace. Ces conditions ont été exprimées, à l'origine, par l'énoncé suivant du *Principe de Dirichlet. Si* D *est un domaine*, S *sa frontière et* f(p) *une fonction continue sur* S, *il existe une fonction*

---

[1] Conférence faite le 17 juin 1935 dans le cycle des *Conférences internationales des Sciences mathématiques* organisées par l'Université de Genève; série consacrée aux *Equations aux dérivées partielles. Conditions propres à déterminer les solutions.*

[2] Cette extension se trouve dans la conférence de M. SCHAUDER.

harmonique V(P), *dans* D, *prenant sur* S *les valeurs données* f(p). Autrement dit, V est continue en tout point de S, sur D + S, si on lui attribue sur S les valeurs $f(p)$.

Le problème de Dirichlet consiste à rechercher cette fonction V.

On a cru pendant longtemps que ce problème était toujours possible, ce qui veut dire, qu'il admettait toujours une solution, ainsi que l'affirmait le principe de Dirichlet. On ne parvenait pas à la résoudre dans le cas d'un domaine quelconque, mais on attribuait cela à l'extrême variété que présentait la notion de domaine. C'est pourquoi on avait été amené, connaissant sa solution dans des cas simples, tel celui de la sphère, à chercher des méthodes de résolution pour des cas de plus en plus étendus.

Les domaines que l'on avait considérés pendant longtemps étaient limités par des surfaces, et c'est, sans doute, à cause de cela qu'un cas simple d'impossibilité, tel que celui qu'a signalé M. Zaremba [1], n'avait pas été aperçu, ou, s'il l'avait été, n'avait pas été de nature à ébranler la solidité du principe de Dirichlet.

Voici ce cas. Supposons le domaine D sphérique. V prend au centre O une valeur déterminée. Envisageons le domaine D′, déduit du précédent, en considérant le point O comme point frontière, et attribuons à $f(p)$, en ce point, une valeur différente de celle qu'y avait la fonction V précédente. Il est facile de voir que la fonction V, dans le cas actuel, est encore celle du cas précédent. Elle n'est donc plus continue au point frontière O. Le problème est impossible.

Quelques années plus tard [2], M. Lebesgue a fait connaître un exemple d'un domaine, *limité par une surface*, pour lequel le problème de Dirichlet n'est pas possible. A cet effet, il considère le potentiel d'une masse distribuée sur un segment de longueur unité, dont la densité, en tout point, est égale à la distance de ce point à une des extrémités du segment, prise comme origine. La surface équipotentielle sur laquelle le potentiel est égal à 2, par exemple, entoure le segment et présente une pointe en origine. Le domaine infini extérieur à cette surface, que l'on peut rendre

---

1 *Bulletin intern. de l'Ac. des Sc. de Cracovie*, 1909, p. 199.
2 *Comptes rendus séances de la Soc. Math. France*, t. 41, 27 nov. 1912, p. 17.

fini, si l'on veut, en le limitant par une sphère, est tel que le problème de Dirichlet n'y est pas possible pour les valeurs 2 sur la surface équipotentielle et les autres valeurs du potentiel sur la sphère. La seule fonction possible V est le potentiel lui-même, et il ne prend pas la valeur 2 en origine.

Ces deux exemples expriment des circonstances qui ne sont que des cas particuliers de phénomènes généraux, que l'on verra par la suite.

Ainsi, *le problème de Dirichlet n'est pas toujours possible*, et cette impossibilité consiste en ce que: il n'existe pas de fonction V prenant les valeurs données *en tous les points de la frontière.*

Il sera utile, pour la suite, de rappeler brièvement, quelques-unes des méthodes de résolution du problème de Dirichlet.

Méthode du balayage de Poincaré [1]. — Grâce à la formule bien connue

$$V = \frac{1}{4\pi} \iint_S f(p) \frac{\partial G(P, Q)}{\partial n_i} dS ,$$

Poincaré ramène la recherche de la solution de ce problème à celle de la fonction de Green du domaine, G(P, Q), et, celle-ci, au moyen d'une inversion du pôle comme centre, à celle de la fonction harmonique V à l'extérieur d'une surface C, régulière à l'infini et prenant les valeurs unité sur C: c'est le potentiel de la distribution d'équilibre sur le conducteur C. Cette notion de *potentiel conducteur* sera généralisée plus tard et jouera un rôle fondamental.

Pour trouver cette fonction V, Poincaré considère, d'une part, une sphère contenant à l'intérieur C, et sur elle une distribution uniforme de masse dont le potentiel est égal à l'unité à l'intérieur et, d'autre part, une suite de sphères extérieures à C, mais telles que tout point extérieur à C soit intérieur à l'une d'elles, au moins. Il range ces sphères en une suite, de façon que chacune d'elles y figure une infinité de fois, et procède au balayage de la masse qui se trouve dans chacune d'elles, successivement. Cette opération se traduit par ce que le potentiel de la masse totale,

---

[1] Sur les équations aux dérivées partielles de la Physique mathématique (*Amer. Jour. of Math.*, t. 12, 1890).

modifiée, diminue, à chaque stade de l'opération, et devient harmonique dans la sphère de la suite qu'il concerne, puisqu'on remplace la masse intérieure à cette sphère par une masse distribuée sur sa frontière. En vertu du théorème de Harnack, la suite de fonctions ainsi trouvées a une limite V qui est harmonique.

En assujetissant la surface C à satisfaire à certaines conditions — que M. Lebesgue a désignées, depuis, par le nom de conditions de régularité [1] — Poincaré montre que cette fonction prend bien la valeur unité sur C, ce qui assure, de plus, son unicité.

Il est bon de remarquer qu'il y a, dans la méthode précédente, deux parties: la définition d'une fonction V et l'étude de sa continuité à la frontière. De plus, la démonstration de l'unicité est subordonnée aux conditions de régularité.

Méthodes relevant du principe du minimum. — Il y a tout un groupe de telles méthodes [2]. Leur but était de redresser les erreurs contenues dans le raisonnement bien connu de Riemann, erreurs qui ont été mises en évidence par Weierstrass et M. Hadamard [3].

Il suffira de rappeler ici deux de ces méthodes: celles de M. Zaremba [4] et celle de M. Lebesgue [5].

Voici la méthode de M. Zaremba. Désignons par Ω un domaine général qui est simplement un *ensemble ouvert* d'un seul tenant, et soit Σ sa frontière. Considérons l'ensemble F des fonctions continues dans $\Omega + \Sigma$ et prenant sur Σ les valeurs données f, fonctions admettant des dérivées premières continues dans Ω. Supposons que l'intégrale

$$\mathrm{A} = \iiint_{\Omega} \left[\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)^2\right] d\Omega$$

existe pour elles, car, d'après l'objection de M. Hadamard, elle pourrait bien n'exister pour aucune de ces fonctions. Soit I le minimum de ces intégrales.

---

1 *C. R. de l'Ac. des Sc.*, t. 178, 21 janv. 1924, p. 349.

2 Voir pour la bibliographie le fascicule de M. Bouligand : Fonctions harmoniques, etc., du *Mémorial des Sciences mathématiques*.

3 WEIERSTRASS, *Werke*, Bd. 2, p. 49; HADAMARD, *Bul. Soc. math. Fr.*, t. 34, 1906, p. 135.

4 Loc. cit.

5 *C. R. Ac. Sc.*, t. 154, 1912, p. 335; t. 155, 1912, p. 699; *Rendiconti Circ. mat. di Palermo*, t. 24, 1907, p. 371.

On appelle *minimisante*, une suite de fonctions v_i de F dont les intégrales tendent vers I.

Assignons à tout point M de Ω un nombre positif ρ_M inférieur à la distance de M à Σ et soit

$$F_i(M) = \frac{3}{4\pi\rho_M^3} \iiint_{(\rho_M)} v_i \, dx \, dy \, dz$$

(ρ_M) étant la sphère de rayon ρ_M et de centre M. M. Zaremba démontre que

La suite $F_i(M)$ tend uniformément — sur tout ensemble fermé E de points M, pour lesquels ρ_M admet une limite inférieure plus grande que zéro — vers une fonction harmonique V, dans Ω, dont l'intégrale est égale à I.

V est indépendante du choix des ρ_M.

S'il existe une fonction u de E dont l'intégrale soit encore égale à I, on aura $u = V$.

V est, à une constante additive près, la solution du problème suivant:

On cherche une fonction harmonique U dans Ω, pour laquelle l'intégrale existe et est telle que

$$\iiint_{\Omega} \left(\frac{\partial u}{\partial x} \cdot \frac{\partial h}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \cdot \frac{\partial h}{\partial y} + \frac{\partial u}{\partial z} \cdot \frac{\partial h}{\partial z}\right) d\Omega = \iiint_{\Omega} \left(\frac{\partial U}{\partial x} \cdot \frac{\partial h}{\partial x} + \ldots\right) . \, d\Omega$$

pour toute fonction harmonique h dans Ω, et toute fonction u de E, les intégrales A existant pour h et u.

Si un point p de Σ peut être pris pour sommet d'un cône de révolution de hauteur non nulle, extérieur à Ω, V tend vers f en ce point.

On distingue également ici, comme dans la méthode du balayage, les deux parties: le procédé de définition de V et la recherche de sa continuité à la frontière. Mais l'unicité de V n'est plus subordonnée à la condition de régularité constituée par l'existence du cône.

Voici maintenant la méthode de M. Lebesgue. On considère, comme précédemment, une suite minimisante v_i, mais on borne, en valeur absolue, toutes ces fonctions, par un même nombre, car les fonctions v_i peuvent ne pas avoir de dérivées premières sur des surfaces analytiques telles que tout domaine intérieur à Ω n'en contienne qu'un nombre fini. Soit s une sphère intérieure à Ω. On peut extraire de la suite donnée une autre suite convergeant uniformément vers une fonction harmonique dans s. En prenant des sphères successives, empiétant chacune sur la précédente, et en tenant compte d'un théorème d'unicité [1] de M. Lebesgue — qui montre que si deux suites minimisantes tendent vers des limites dans un domaine intérieur à Ω, ces limites coïncident — on voit aisément que l'on définit ainsi une fonction harmonique V dans Ω.

Pour rechercher sa continuité à la frontière, M. Lebesgue introduit la notion de fonction barrière [2], qui s'est montrée, depuis, d'un puissant intérêt dans l'étude des fonctions harmoniques [3]. Cette notion permet à l'auteur de formuler un critère de régularité plus général que celui de M. Zaremba.

On peut faire ici la même remarque au sujet des deux parties que comporte la méthode.

On doit également à M. Lebesgue une autre méthode [4], par médiations itérées, que nous regrettons de ne pouvoir exposer ici.

D'autres méthodes sont dues à MM. Gleason, Raynor [5], Phillips et Wiener [6], etc.

Dans toutes ces méthodes on peut distinguer les deux parties précédemment mentionnées.

Enfin, il y a des méthodes relevant des équations intégrales, telles la méthode de Robin, de Neumann, de Fredholm, etc. Ces méthodes ne sauraient nous intéresser pour notre but actuel, car elles sont fondées sur la continuité de la solution du problème de Dirichlet à la frontière.

C'est M. Lebesgue qui a formulé [7] la distinction, qu'il y a lieu de faire, entre les deux parties, dans les méthodes de résolution du problème de Dirichlet. Ce fait, joint à l'exemple d'impossi-

---

1 *Rendiconti* (loc. cit.).
2 *C. R.*, t. 155 (loc. cit.).
3 Kellogg, *Bul. of the Amer. Math. Soc.*, nov.-déc. 1926.
4 *C. R.*, t. 154 (loc. cit.).
5 *Annual's of Math.*, vol. 23, p. 183.
6 *Journ. math. phys. Mass. Inst. of Tech.*, 2^me^ série, n° 55, mars 1923.
7 *C. R.*, t. 178 (loc. cit.).

bilité de ce problème qu'il a donné, a conduit l'éminent auteur aux notions fondamentales de *point régulier* et *point irrégulier* de la frontière d'un domaine.

Un point frontière sera dit *régulier* si la fonction V est continue et prend la valeur f en ce point, quelle que soit la fonction f. Contrairement, le point sera dit *irrégulier.*

M. Lebesgue montre de plus que le caractère régulier et irrégulier d'un point frontière est local et ne dépend que de son voisinage immédiat de la frontière.

Les diverses conditions de régularité que l'on avait données dépendent des procédés employés pour définir la fonction V. Ce fait ne présenta aucun inconvénient tant qu'il s'était agi, comme cela a été le cas, de rechercher des domaines de plus en plus généraux pour lesquels on pût résoudre le problème de Dirichlet. En effet, on obtenait de tels domaines en assujettissant leurs frontières à satisfaire à un même critère de régularité, obtenu au moyen d'un procédé déterminé.

Toutefois, on ne saurait employer, pour vérifier le caractère régulier des points frontière d'un domaine, des conditions de régularité différentes, si ces conditions correspondent à des procédés *ne conduisant pas tous* à la même fonction V.

Ce fait gênant conduit à se demander si les fonctions V auxquelles donnent naissance les divers procédés que l'on a donnés, sont, ou ne sont pas, différentes. A cette importante question, nous répondrons (chap. IV) par la négative: ces procédés conduisent tous à une même fonction V. Dès lors, on pourra employer indistinctement les critères de régularité connus, pour juger de la régularité d'un point frontière.

Ces critères sont des conditions de régularité *suffisantes*, sauf un, dû à M. Lebesgue [1], qui est nécessaire et suffisant. Il a un caractère fonctionnel.

On peut conclure ce chapitre de la manière suivante. Quelques-uns des procédés que l'on avait donnés pour résoudre le problème de Dirichlet définissent bien une fonction harmonique V, attachée à des valeurs frontières données f, et cela dans le cas d'un domaine général — défini simplement comme un ensemble ouvert. Mais,

---

[1] *C. R.*, t. 178, loc. cit.

soit que leurs auteurs eussent pour objectif simplement la résolution du problème de Dirichlet classique, soit que les critères de régularité ou d'irrégularité que l'on donnait ne permissent pas de connaître le comportement de la fonction V en tous les points de la frontière, à cause de leur caractère suffisant, une telle fonction V n'a jamais été désignée pour être solution d'un problème de Dirichlet plus étendu que le problème classique, devant remplacer celui-ci dans les cas où il est impossible.

II. — Le problème de Dirichlet généralisé.

C'est M. N. Wiener [1] qui, en 1934, donna un procédé de définition d'une fonction V, indépendamment de l'idée de résoudre le problème de Dirichlet classique. De plus, il caractérisa, au moyen d'un critère nécessaire et suffisant de nature quasi-géométrique [2], les points réguliers et irréguliers de la frontière, pour ce procédé. Il envisagea ainsi un problème plus étendu que le problème de Dirichlet classique qu'il désigna par le nom de Problème de Dirichlet généralisé. Son procédé constitue une extension naturelle du problème classique et cela permet de voir que, lorsque celui-ci est possible, sa solution coïncide avec la fonction V donnée par ce procédé.

Il est, dès lors, naturel que l'on désigne un domaine pour lequel le problème classique est possible, par un nom particulier: convenons, selon un usage déjà répandu, de l'appeler *domaine normal*. Par exemple, un domaine formé par un assemblage de cubes, est un tel domaine: on le voit en utilisant, si l'on veut, le critère de M. Zaremba.

Voici le procédé de M. Wiener.

Soient Ω un domaine, borné ou non — ensemble ouvert — Σ sa frontière, supposée bornée, et $f(p)$ une distribution continue sur elle. Considérons d'une part, une fonction continue dans tout l'espace, F, coïncidant avec f sur Σ [3] et, d'autre part, une suite Ω_k de domaines normaux intérieurs à Ω et tendant vers lui.

---

[1] *J. Math. Phys. Mass. Inst. of Tech.*, 2^{me} série, n° 70, janv. 1924.
[2] *Ibid.*, n° 1, janv. 1925.
[3] C'est M. Lebesgue qui a montré la possibilité de construire une telle fonction dans son mémoire cité du Circolo matematico.

Si V_k est la solution du problème de Dirichlet dans Ω_k pour les valeurs de F sur sa frontière Σ_k, la suite des fonctions V_k tend uniformément vers une fonction harmonique V, dans toute région fermée de Ω. Cette fonction est indépendante du choix des Ω_k et de la fonction F. C'est la solution du problème de Dirichlet généralisé.

M. Wiener applique tout de suite ce procédé au cas d'un ensemble fermé borné E, en considérant le domaine infini qu'il détermine dans l'espace et dont E, ou une partie de E est la frontière. Pour ce domaine, il prend f égale à l'unité. La fonction V ainsi obtenue est appelée, par lui, *potentiel conducteur de l'ensemble* E. C'est la généralisation de la notion classique pour un conducteur. De plus, si $v(P)$ est cette fonction, l'intégrale de Gauss

$$c = \frac{1}{4\pi} \iint_S \frac{dv}{dn_i}\, dS$$

étendue à une surface contenant E à l'intérieur permet à M. Wiener de définir la notion de *capacité de l'ensemble* E, comme dans le cas classique.

Les deux notions précédentes, de potentiel conducteur et de capacité d'un ensemble, se sont révélées fondamentales pour la théorie des fonctions harmoniques. On le verra par la suite.

C'est ainsi que, grâce à elles, M. Wiener a pu donner le critère suivant de régularité d'un point frontière.

Soient p *un point frontière de* Ω, λ *un nombre positif inférieur à l'unité*, γ_n *la capacité de l'ensemble de points non appartenant à* Ω *et tels que leur distance à* p *soit comprise entre* λ^n *et* λ^{n-1}.

Alors, p *est régulier ou irrégulier selon que la série*

$$\frac{\gamma_1}{\lambda} + \frac{\gamma_2}{\lambda^2} + \dots + \frac{\gamma_n}{\lambda^n} + \dots$$

est divergente ou convergente[1].

[1] Dans le cas de l'espace à deux dimensions cette série est remplacée par la suivante: $\gamma_1 + 2\gamma_2 + \dots + 2^m\gamma_m + \dots$; γ_m étant la capacité de l'ensemble des points non appartenant à Ω, dont la distance à p est comprise entre λ^{2m} et γ^{2m+1}.

Les points de la frontière sont ainsi caractérisés d'une manière précise, et le caractère local est évident.

Mais cette précision même impose, dès lors, la recherche suivante: *Etudier la distribution des points réguliers et irréguliers à la frontière d'un domaine.*

On a réussi à faire cette étude complètement, dans ces temps derniers. Comme les recherches que l'on a faites sur le problème de Dirichlet généralisé ont, plus ou moins directement, concouru vers ce but, nous allons en donner un aperçu rapide qui aboutira au résultat général et définitif obtenu dans cette étude.

Fonction de Green (généralisée). Si l'on considère un point fixe Q dans Ω et la solution du problème de Dirichlet généralisé pour les valenrs $\frac{1}{r} = \frac{1}{pQ}$ sur la frontière, soit $\Gamma(P, Q)$, la fonction

$$G(P, Q) = \frac{1}{r} - \Gamma(P, Q)$$

sera la fonction de Green du domaine Ω. De même que dans le cas classique, cette fonction est positive et a un pôle en Q; mais *elle ne s'annule plus nécessairement à la frontière du domaine.*

On démontre [1] que: si la fonction de Green tend vers zéro sur une suite de points de Ω tendant vers p, la fonction V tend vers $f(p)$.

On conclut de là ce fait important que

Un point p *de la frontière est régulier ou irrégulier selon que la fonction de Green tend vers zéro ou non.*

Ainsi, l'étude qui nous intéresse se ramène à celle de la fonction de Green du domaine. On a remarqué [2] que l'on peut, avec avantage ramener encore l'étude de cette fonction à celle du potentiel conducteur. Le passage à cette dernière fonction s'opère aisément au moyen de l'énoncé suivant:

Si e est un ensemble fermé borné dont aucun point n'appartient à Ω et $v(P)$ son potentiel conducteur, on a l'inégalité

$$\frac{1}{r}\left[\frac{1 - v(P)}{1 - M}\right] \geq G(P, Q)$$

[1] Bouligand, *Annales de la Soc. polonaise de Math.*, 1925.
Kellogg, *Proc. of the Nat. Ac. of Sc.*, t. 12, VI, 1926, p. 402.

[2] F. Vasilesco, *Journal de math.*, t. IX, 1930.

en désignant par r le rayon d'une sphère σ de centre Q, tout entière dans Ω et par M le maximum de v sur elle.

On pourra utiliser cette inégalité de la manière suivante. Un point régulier p de Σ restera régulier pour le domaine infini extérieur à la portion Σ_r déterminée sur l'ensemble des points n'appartenant pas à Ω par une sphère (r) de centre p et de rayon r. Si la fonction de Green de ce domaine tend vers zéro en ce point, le potentiel de Σ_r tend vers 1, et réciproquement. C'est de l'étude à la frontière du potentiel que l'on obtiendra facilement des résultats sur les points frontière d'un domaine.

Ensembles impropres. Ensemble réduit. Frontière réduite [1]. On appelle impropre, un ensemble borné ou non, dont chaque partie fermée est de capacité nulle.

Un ensemble est de capacité nulle en un point, lorsqu'il existe une sphère centrée en ce point telle que la partie de l'ensemble qu'elle contient soit de capacité nulle.

On démontre, à l'aide du lemme de MM. Borel-Lebesgue que

Un ensemble fermé borné qui est la somme d'une infinité dénombrable d'ensembles fermés de capacité nulle est aussi de capacité nulle.

On voit que tout ensemble de capacité nulle en un point est impropre. Mais la réciproque n'est pas vraie.

Si E est un ensemble fermé borné ou non, et $\mathcal{E}$ l'ensemble de ceux de ses points en lesquels il est de capacité nulle, $\mathcal{E}$ est impropre. On appellera $\mathcal{E}$ la partie impropre de E. Si $E - \mathcal{E}$ existe, il est fermé et n'est de capacité nulle en aucun de ses points. Il n'a donc plus de partie impropre.

Un ensemble sans partie impropre sera dit réduit. Tout ensemble pourra être réduit.

En particulier, si $\mathcal{E}$ est la partie impropre de la frontière Σ d'un domaine, $\Sigma - \mathcal{E}$ est fermé, et l'on démontre qu'aucun point de $\mathcal{E}$ n'est limite de points extérieurs à Ω. Donc $\Omega' = \Omega + \mathcal{E}$ est encore un domaine de frontière réduite $\Sigma - \mathcal{E}$. On appellera frontière extérieure de Ω l'ensemble de points Σ'_e de Σ qui sont limites de points extérieurs à Ω. Les autres points de Σ forment

[1] F. Vasilesco (loc. cit.).

la frontière intérieure Σ_i'. On voit que $\Omega'' = \Omega' + \Sigma_i'$ est encore un domaine.

Singularités artificielles des fonctions harmoniques. Résultats définitifs. On connaît le résultat suivant, qui remonte à Schwartz, et qui, pour avoir été retrouvé récemment par M. PICARD [1], a donné lieu à tous les développements que l'on verra:

Il n'y a pas de singularité pour une fonction harmonique, en un point où elle est continue, si elle reste bornée dans le voisinage de ce point.

M. Lebesgue [2] en a donné l'extension suivante:

Il n'y a pas de singularités pour une fonction harmonique bornée dans un domaine, aux points entièrement intérieurs à ce domaine, où elle n'est pas définie,

1° d'un arc borné de courbe analytique, ou de courbe rectifiable,

2° d'un ensemble réductible de points ou de courbes,

3° d'un ensemble pouvant être enfermé dans un nombre fini de sphères, dont la somme des rayons puisse être prise aussi petite que l'on voudra.

On peut remarquer que tous ces ensembles sont de capacité nulle. Mais cette notion n'était pas née au moment où cet énoncé avait été donné.

M. BOULIGAND [3] a établi l'énoncé plus général suivant:

Il n'y a pas de singularités pour une fonction harmonique aux points d'un ensemble de capacité nulle entièrement intérieur à un domaine où elle reste bornée.

M. KELLOG [4] établit la réciproque de cet énoncé.

Enfin, le raisonnement de Kellogg permet de démontrer le résultat définitif [5] que l'on peut atteindre dans cet ordre d'idées:

Soient T un domaine et B une partie de sa frontière telle que $T' = T + B$ soit encore un domaine; T et B peuvent s'étendre à l'infini. Si B est impropre, toute fonction harmonique bornée

---

[1] *C. R.*, t. 176, 1923, p. 933.
[2] *C. R.*, t. 176, 1923, p. 1097.
[3] Loc. cit.
[4] Loc. cit.
[5] F. VASILESCO, loc. cit.

dans le voisinage de chaque point de B peut être définie sur B, de manière qu'elle soit harmonique sur T′, et réciproquement, si cela est possible, B est un ensemble impropre. Le maximum de l'ensemble B est la partie impropre de la frontière de T.

Théorèmes généraux sur les fonctions harmoniques. Grâce aux notions de capacité, de potentiel conducteur et d'ensemble impropre, on peut établir les théorèmes généraux suivants:

Soient F(P) et Φ(P) deux fonctions harmoniques bornées dans un domaine Ω, prenant les mêmes valeurs sur une partie $\Sigma - s$ de la frontière, s étant un ensemble fermé de Σ.

Si M est une borne supérieure commune à $|F(P)|$ et à $|\Phi(P)|$ et $v(P)$ le potentiel de s, on a dans Ω

$$2Mv(P) \geqq |F(P) - \Phi(P)|$$ [1]

Ainsi, le potentiel conducteur de s mesure, en quelque sorte, la différence entre ces deux fonctions harmoniques.

En particulier, si s est de capacité nulle, F(P) et Φ(P) coïncident.

Cependant, ce cas particulier peut être également considéré comme tel, pour l'énoncé général[2] suivant:

Il ne peut y avoir deux fonctions harmoniques bornées, distinctes, dans un domaine Ω, si leur différence tend vers zéro partout sur sa frontière Σ, sauf sur un ensemble impropre de celle-ci.

Enfin, on a le théorème [3] suivant:

Si une fonction harmonique bornée dans Ω est continue aux points de Σ, sauf aux points d'un ensemble s de capacité nulle de celle-ci, elle admet, dans Ω, le même maximum et le même minimum que sur $\Sigma - s$.

Potentiel d'une distribution de masse. Continuité à travers la masse [4]. Une distribution de masse sera une fonction complète-

---

[1] F. Vasilesco, loc. cit.
[2] F. Vasilesco, *C. R.*, t. 200, 1935, p. 199 et aussi *Journ. de math.*, 1935, fasc. 2.
[3] *Ibid.*
[4] F. Vasilesco, *C. R.*, t. 200, 1935, p. 1173 et *Journ.* (loc. cit.). G. C. Evans, *Transactions of the Am. Math. Soc.*, vol. 37, 1935, p. 226.

ment additive d'ensemble mesurable B. On peut se borner à n'envisager que des distributions positives, toute autre distribution étant la différence de deux telles distributions. On a le théorème suivant:

Soient E un ensemble parfait borné et $\mu(e)$ une distribution positive sur lui. Le potentiel de cette distribution (donné par une intégrale de Stieltjes) est continu en tout point de E où il est continu sur E. L'ensemble des points de E où il est continu sur E est partout dense, sur E.

Etude de la distribution des points réguliers et irréguliers de la frontière d'un domaine. Nous sommes maintenant en mesure d'aborder cette étude.

Tout d'abord, on démontre que la solution du problème de Dirichlet généralisé pour le domaine Ω est la même que pour le domaine Ω' si les données frontières coïncident sur Σ'. En particulier, la fonction de Green est la même pour ces domaines [1].

En conséquence, pour étudier le comportement à la frontière du potentiel d'un ensemble fermé borné E, il suffit de considérer l'ensemble réduit qui s'en déduit, et de celui-ci, seulement la partie E' qui constitue la frontière du domaine infini et d'un seul tenant D. Soient E'_e la frontière extérieure de ce domaine et E'_i sa frontière intérieure.

On démontre que le potentiel de E'_e tend vers l'unité aux points d'un ensemble partout dense sur E'_e. De même, un ensemble réduit borné sans domaine intérieur est tel que, en chacun de ses points, son potentiel a comme plus grande limite l'unité. On en déduit, en réunissant ces énoncés, le résultat sur E' [2].

On peut aller plus loin dans cette voie et démontrer

Le lemme de Kellogg. — Tout ensemble réduit borné a des points réguliers [3].

On en conclut que, sur l'ensemble E', l'ensemble des points

---

[1] F. Vasilesco, *Journ. de math.*, loc. cit., 1930.
[2] *Ibid.*
[3] Evans, *Proc. of the Nat. Acad. of Sc.*, 19, 1933, p. 457; Vasilesco, *Journ.*, loc. cit. 1935.

réguliers est partout dense, et que, par conséquent, la fonction de Green du domaine D tend vers zéro sur un ensemble de points partout dense sur E′.

Le passage de cette étude concernant le potentiel conducteur, au cas d'un domaine quelconque, se fait au moyen de l'artifice indiqué précédemment, et l'on peut énoncer le théorème suivant:

L'ensemble des points réguliers est partout dense sur la frontière réduite d'un domaine Ω.

Mais que peut-on dire de l'ensemble des points irréguliers ?

On peut former un exemple montrant que cet ensemble peut, également, être partout dense sur la frontière [1]. Sans entrer dans les détails de la construction, disons simplement que chaque point irrégulier est formé par une épine de M. Lebesgue, et que cet ensemble est dénombrable. Il est donc impropre.

On peut même donner un exemple [2] d'un domaine sur la frontière réduite duquel les points irréguliers forment une infinité de lignes analytiques, ou en général, d'ensembles de capacité nulle, qui sont partout denses. Dans cet exemple, l'ensemble des points irréguliers est encore impropre, mais il n'est plus dénombrable.

La recherche de ces exemples a été provoquée par l'affirmation qui avait été formulée, auparavant, que l'ensemble des points irréguliers serait de capacité nulle [3]. Il n'en est rien, comme on vient de le voir, et comme on le démontrera d'une façon générale.

En effet, grâce au lemme de Kellogg, on démontre que l'ensemble des points de la frontière d'un domaine, où la plus grande limite de la fonction de Green est supérieure ou égale à un nombre donné ε, est de capacité nulle [4].

On en conclut que

L'ensemble des points irréguliers est impropre.

Nous atteignons ainsi le résultat général au sujet de l'étude que nous nous sommes proposée.

Sur la frontière réduite d'un domaine, l'ensemble des points

---

1 F. Vasilesco, *Journ.*, loc. cit., 1930.
2 F. Vasilesco, *C. R.*, t. 187, 1928, p. 1116.
3 O. D. Kellogg, *Bul.*, loc. cit.
4 Vasilesco, *Journ.*, loc. cit., 1930.

irréguliers est partout dense. Il peut en être de même de celui des points irréguliers, mais celui-ci est un ensemble impropre.

Le résultat qui précède, concernant la fonction de Green, permet de formuler l'énoncé suivant, dû à M. Bouligand [1]:

V(P) étant la solution du problème de Dirichlet généralisé, l'ensemble des points frontière où quelque valeur limite de V est extérieure à l'intervalle $[f(p) - \varepsilon, f(p) + \varepsilon]$ est de capacité nulle.

Cas des surfaces de niveau du potentiel [2]. Considérons un ensemble réduit borné. En chacun de ses points irréguliers le potentiel conducteur a une limite inférieure plus petite que l'unité. Appelons surface de niveau S_λ du potentiel, la frontière du domaine formé par les points où $v < \lambda < 1$. On démontre que le potentiel de S_λ est égal à $\frac{v}{\lambda}$ et que les points irréguliers de S_λ sont ceux où la plus petite limite de v est inférieure à λ, les autres étant réguliers. D'après le résultat général précédent, on conclut que

Une surface de niveau du potentiel d'un ensemble réduit borné ne peut avoir qu'un ensemble de capacité nulle de points réguliers.

Propriété de la solution du problème de Dirichlet généralisé. Le même résultat général précédent, joint à des résultats antérieurs concernant les fonctions harmoniques, permet d'énoncer le théorème suivant:

Il ne peut y avoir deux fonctions harmoniques bornées qui tendent vers la même valeur aux points réguliers de la frontière d'un domaine [3].

Et cet énoncé permet de démontrer la propriété suivante de la solution du problème de Dirichlet généralisé:

Elle peut être définie au moyen de domaines normaux tendant vers Ω d'une manière quelconque, et non plus seulement par son intérieur [4].

---

1 Loc. cit. et VASILESCO, *Journ.*, loc. cit., 1930.
2 F. VASILESCO, *C. R.*, t. 187, 1928, p. 635.
3 F. VASILESCO, *C. R.*, t. 200, 1935, p. 199 et *Journ.*, loc. cit., 1935.
4 *Ibid.*

III. — Le problème de Dirichlet généralisé et la méthode du balayage.

On a vu dans le chapitre I que la méthode du balayage conduit à la définition d'une fonction harmonique V, mais que la démonstration de l'unicité de cette fonction est surbordonnée à l'assujettissement de la surface du conducteur à vérifier certaines conditions de régularité, qui assurent sa continuité à la frontière.

Cependant, le raisonnement de Poincaré n'implique nullement que l'on ait affaire à un conducteur limité par une surface régulière. Il suffit de considérer à la place de celui-ci un ensemble fermé borné. La question de l'unicité se pose alors. On démontre [1] que la fonction V définie dans ces conditions par le procédé du balayage est unique. Elle coïncide avec le potentiel conducteur de l'ensemble considéré. La méthode du balayage conduit donc, en fait, à la solution du problème de Dirichlet généralisé pour les valeurs unité à la frontière.

M. de la Vallée Poussin [2] a étendu récemment la méthode du balayage à une distribution de masse générale, telle qu'on l'a définie plus haut. Il considère une distribution dans un domaine, et suppose que son potentiel est continu à la frontière du domaine. En balayant cette masse, il trouve une distribution sur la frontière du domaine, qui jouit de la propriété que: son potentiel est égal au potentiel initial à l'extérieur et inférieur à l'intérieur. Si la surface frontière est régulière, le potentiel obtenu est continu à travers elle; à l'intérieur, il est donc la solution du problème de Dirichlet pour les valeurs qu'y prend le potentiel primitif. Il en est de même si, la surface étant irrégulière, elle satisfait, en chacun de ses points à la condition de Poincaré. A cause de la continuité à travers la frontière, M. de la Vallée Poussin démontre que la distribution sur la frontière donnée par le balayage est unique.

La considération du problème de Dirichlet généralisé permet d'aller plus loin dans cette voie, en montrant la vraie raison des choses.

---

1 F. Vasilesco, *C. R.*, t. 193, 1931, p. 640.
2 *Annales de l'Inst. Poincaré*, 3, 1933, p. 175.

On démontre [1] que si l'on considère un domaine général — ensemble ouvert — de frontière Σ, le balayage d'une masse dont le potentiel, U, est continu à travers Σ, donne une distribution sur Σ, $\mu(e)$, dont le potentiel, égal à U à l'extérieur, est égal à la solution du problème de Dirichlet généralisé, pour les valeurs de U sur Σ, à l'intérieur.

Grâce à l'unicité de cette solution — et non plus à la continuité à la frontière — on démontre, en supposant Σ une surface irrégulière S, que la distribution est unique.

Mais il y a plus. On démontre que le potentiel de la distribution $\mu(S)$ prend, en tout point p de S, comme valeur, la plus petite limite de ses valeurs intérieures, en ce point, soit, $U(p) - \lambda$. Il est donc continu en tous les points de S où cette limite est unique, donc égale à $U(p)$. Ces points contiennent tous les points irréguliers de S, et, en particulier, ceux en lesquels S satisfait à la condition de Poincaré. Les points où il est discontinu forment un ensemble impropre.

Par exemple, la balayage d'une masse unité concentrée en un point P du domaine donne une distribution $\mu(S, P)$ dont le potentiel est égal à $\frac{1}{r} - G(M, P)$, $G(M, P)$ étant la fonction de Green du domaine. Il est donc continu aux points réguliers et discontinu aux points irréguliers.

On peut aller encore plus loin dans la voie ouverte par M. de la Vallée Poussin par l'extension de la méthode du balayage.

IV. — Raccords avec les méthodes du chapitre I.

Ainsi que nous l'avons fait voir à la fin du chapitre I, il est important de rechercher si les divers procédés que l'on a rappelés dans ce chapitre, conduisent à des fonctions harmoniques différentes ou non. Cette recherche est importante, en outre, au point de vue suivant:

C'est que, si tous ces procédés conduisent à la même fonction harmonique V, identique à la solution du problème de Dirichlet généralisé, *on enrichit du coup cette solution de toutes les propriétés que ces divers procédés expriment.*

[1] F. Vasilesco, *C. R.*, t. 200, 1935, p. 199 et *Journ.*, loc. cit., 1935.

On démontre qu'il en est bien ainsi [1]. On vient de le voir, dans le chapitre précédent, pour la méthode du balayage. On le vérifie pour la méthode de M. Zaremba qui apporte les propriétés dont sa solution jouit, et qui ont été énumérées au chapitre I, en particulier la suivante, qu'il n'est pas inutile de rappeler:

La solution du problème de Dirichlet généralisé rend minimum l'intégrale

$$\iiint_{\Omega} \left[\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)^2\right] d\Omega$$

relative à toutes les fonctions continues u et ayant des dérivées premières continues dans Ω, qui prennent sur la frontière Σ du domaine Ω les valeurs continues f qui définissent cette solution.

Pour d'autres procédés rappelés au chapitre I, tel que cela a été le cas pour la méthode du balayage, il faut dissocier le procédé de définition de la fonction V des conditions à la frontière, et démontrer l'existence et l'unicité de cette fonction. L'introduction de la solution du problème de Dirichlet facilite cette tâche. Tel est le cas pour le procédé de Raynor, pour celui de Phillips et Wiener, etc.

J'ajoute que, pour le procédé de M. Lebesgue, par des médiations itérées, l'identité qui nous occupe a été démontrée, il y a quelques années, par M. Perkins [2]. Ce procédé apporte une jolie propriété de la solution du problème de Dirichlet généralisé.

Ainsi, *tous les procédés envisagés conduisent à une même fonction* V, *qui est la solution du problème de Dirichlet généralisé.* On pourra donc donner de celle-ci telle définition que l'on se plaira de choisir parmi ces procédés.

Conclusion.

Nous pouvons conclure de la manière suivante: C'est que, toutes les fois qu'un problème conduit au problème de Dirichlet *classique*, pour un domaine D, ce qui implique, pour ce domaine, une conformation particulière, ce même problème conduira au problème de Dirichlet *généralisé*, si l'on envisage le domaine le plus général, défini simplement comme un ensemble ouvert.

---

1 F. Vasilesco, *C. R.*, t. 200, 1935, p. 1721, séance du 20 mai.

2 *C. R.*, t. 184, 24 janvier 1927, p. 182.