III. — Le problème de Dirichlet généralisé ET LA MÉTHODE DU BALAYAGE.

III. — Le problème de Dirichlet généralisé et la méthode du balayage.

On a vu dans le chapitre I que la méthode du balayage conduit à la définition d'une fonction harmonique V, mais que la démonstration de l'unicité de cette fonction est surbordonnée à l'assujettissement de la surface du conducteur à vérifier certaines conditions de régularité, qui assurent sa continuité à la frontière.

Cependant, le raisonnement de Poincaré n'implique nullement que l'on ait affaire à un conducteur limité par une surface régulière. Il suffit de considérer à la place de celui-ci un ensemble fermé borné. La question de l'unicité se pose alors. On démontre [1] que la fonction V définie dans ces conditions par le procédé du balayage est unique. Elle coïncide avec le potentiel conducteur de l'ensemble considéré. La méthode du balayage conduit donc, en fait, à la solution du problème de Dirichlet généralisé pour les valeurs unité à la frontière.

M. de la Vallée Poussin [2] a étendu récemment la méthode du balayage à une distribution de masse générale, telle qu'on l'a définie plus haut. Il considère une distribution dans un domaine, et suppose que son potentiel est continu à la frontière du domaine. En balayant cette masse, il trouve une distribution sur la frontière du domaine, qui jouit de la propriété que: son potentiel est égal au potentiel initial à l'extérieur et inférieur à l'intérieur. Si la surface frontière est régulière, le potentiel obtenu est continu à travers elle; à l'intérieur, il est donc la solution du problème de Dirichlet pour les valeurs qu'y prend le potentiel primitif. Il en est de même si, la surface étant irrégulière, elle satisfait, en chacun de ses points à la condition de Poincaré. A cause de la continuité à travers la frontière, M. de la Vallée Poussin démontre que la distribution sur la frontière donnée par le balayage est unique.

La considération du problème de Dirichlet généralisé permet d'aller plus loin dans cette voie, en montrant la vraie raison des choses.

---

1 F. Vasilesco, *C. R.*, t. 193, 1931, p. 640.
2 *Annales de l'Inst. Poincaré*, 3, 1933, p. 175.

On démontre [1] que si l'on considère un domaine général — ensemble ouvert — de frontière Σ, le balayage d'une masse dont le potentiel, U, est continu à travers Σ, donne une distribution sur Σ, $\mu(e)$, dont le potentiel, égal à U à l'extérieur, est égal à la solution du problème de Dirichlet généralisé, pour les valeurs de U sur Σ, à l'intérieur.

Grâce à l'unicité de cette solution — et non plus à la continuité à la frontière — on démontre, en supposant Σ une surface irrégulière S, que la distribution est unique.

Mais il y a plus. On démontre que le potentiel de la distribution $\mu(S)$ prend, en tout point p de S, comme valeur, la plus petite limite de ses valeurs intérieures, en ce point, soit, $U(p) - \lambda$. Il est donc continu en tous les points de S où cette limite est unique, donc égale à $U(p)$. Ces points contiennent tous les points irréguliers de S, et, en particulier, ceux en lesquels S satisfait à la condition de Poincaré. Les points où il est discontinu forment un ensemble impropre.

Par exemple, la balayage d'une masse unité concentrée en un point P du domaine donne une distribution $\mu(S, P)$ dont le potentiel est égal à $\frac{1}{r} - G(M, P)$, $G(M, P)$ étant la fonction de Green du domaine. Il est donc continu aux points réguliers et discontinu aux points irréguliers.

On peut aller encore plus loin dans la voie ouverte par M. de la Vallée Poussin par l'extension de la méthode du balayage.

IV. — Raccords avec les méthodes du chapitre I.

Ainsi que nous l'avons fait voir à la fin du chapitre I, il est important de rechercher si les divers procédés que l'on a rappelés dans ce chapitre, conduisent à des fonctions harmoniques différentes ou non. Cette recherche est importante, en outre, au point de vue suivant:

C'est que, si tous ces procédés conduisent à la même fonction harmonique V, identique à la solution du problème de Dirichlet généralisé, *on enrichit du coup cette solution de toutes les propriétés que ces divers procédés expriment.*

[1] F. Vasilesco, *C. R.*, t. 200, 1935, p. 199 et *Journ.*, loc. cit., 1935.