IV. — Raccords avec les méthodes du chapitre I.

Objekttyp: **Chapter**

Zeitschrift: **L'Enseignement Mathématique**

Band (Jahr): **35 (1936)**

Heft 1: **L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE**

PDF erstellt am: **10.08.2024**

On démontre[1] que si l'on considère un domaine général — ensemble ouvert — de frontière Σ, le balayage d'une masse dont le potentiel, U, est continu à travers Σ, donne une distribution sur Σ, $\mu(e)$, dont le potentiel, égal à U à l'extérieur, est égal à la solution du problème de Dirichlet généralisé, pour les valeurs de U sur Σ, à l'intérieur.

Grâce à l'unicité de cette solution — et non plus à la continuité à la frontière — on démontre, en supposant Σ une surface irrégulière S, que la distribution est unique.

Mais il y a plus. On démontre que le potentiel de la distribution $\mu(S)$ prend, en tout point p de S, comme valeur, la plus petite limite de ses valeurs intérieures, en ce point, soit, $U(p) - \lambda$. Il est donc continu en tous les points de S où cette limite est unique, donc égale à $U(p)$. Ces points contiennent tous les points irréguliers de S, et, en particulier, ceux en lesquels S satisfait à la condition de Poincaré. Les points où il est discontinu forment un ensemble impropre.

Par exemple, la balayage d'une masse unité concentrée en un point P du domaine donne une distribution $\mu(S, P)$ dont le potentiel est égal à $\frac{1}{r} - G(M, P)$, $G(M, P)$ étant la fonction de Green du domaine. Il est donc continu aux points réguliers et discontinu aux points irréguliers.

On peut aller encore plus loin dans la voie ouverte par M. de la Vallée Poussin par l'extension de la méthode du balayage.

IV. — Raccords avec les méthodes du chapitre I.

Ainsi que nous l'avons fait voir à la fin du chapitre I, il est important de rechercher si les divers procédés que l'on a rappelés dans ce chapitre, conduisent à des fonctions harmoniques différentes ou non. Cette recherche est importante, en outre, au point de vue suivant:

C'est que, si tous ces procédés conduisent à la même fonction harmonique V, identique à la solution du problème de Dirichlet généralisé, *on enrichit du coup cette solution de toutes les propriétés que ces divers procédés expriment.*

[1] F. Vasilesco, *C. R.*, t. 200, 1935, p. 199 et *Journ.*, loc. cit., 1935.

On démontre qu'il en est bien ainsi [1]. On vient de le voir, dans le chapitre précédent, pour la méthode du balayage. On le vérifie pour la méthode de M. Zaremba qui apporte les propriétés dont sa solution jouit, et qui ont été énumérées au chapitre I, en particulier la suivante, qu'il n'est pas inutile de rappeler:

La solution du problème de Dirichlet généralisé rend minimum l'intégrale

$$\iiint_{\Omega} \left[\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)^2\right] d\Omega$$

relative à toutes les fonctions continues u et ayant des dérivées premières continues dans Ω, qui prennent sur la frontière Σ du domaine Ω les valeurs continues f qui définissent cette solution.

Pour d'autres procédés rappelés au chapitre I, tel que cela a été le cas pour la méthode du balayage, il faut dissocier le procédé de définition de la fonction V des conditions à la frontière, et démontrer l'existence et l'unicité de cette fonction. L'introduction de la solution du problème de Dirichlet facilite cette tâche. Tel est le cas pour le procédé de Raynor, pour celui de Phillips et Wiener, etc.

J'ajoute que, pour le procédé de M. Lebesgue, par des médiations itérées, l'identité qui nous occupe a été démontrée, il y a quelques années, par M. Perkins [2]. Ce procédé apporte une jolie propriété de la solution du problème de Dirichlet généralisé.

Ainsi, *tous les procédés envisagés conduisent à une même fonction* V, *qui est la solution du problème de Dirichlet généralisé.* On pourra donc donner de celle-ci telle définition que l'on se plaira de choisir parmi ces procédés.

CONCLUSION.

Nous pouvons conclure de la manière suivante: C'est que, toutes les fois qu'un problème conduit au problème de Dirichlet *classique*, pour un domaine D, ce qui implique, pour ce domaine, une conformation particulière, ce même problème conduira au problème de Dirichlet *généralisé*, si l'on envisage le domaine le plus général, défini simplement comme un ensemble ouvert.

---

1 F. VASILESCO, *C. R.*, t. 200, 1935, p. 1721, séance du 20 mai.

2 *C. R.*, t. 184, 24 janvier 1927, p. 182.