

I.

Objektyp: **Chapter**

Zeitschrift: **L'Enseignement Mathématique**

Band (Jahr): **35 (1936)**

Heft 1: **L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE**

PDF erstellt am: **09.08.2024**

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern. Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

Haftungsausschluss

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

Ein Dienst der *ETH-Bibliothek*
ETH Zürich, Rämistrasse 101, 8092 Zürich, Schweiz, www.library.ethz.ch

<http://www.e-periodica.ch>

En 1932 j'ai employé pour la première fois le second procédé qui me semble assez simple et bref (voir *C. R. de l'Acad. des Sciences*, décembre 1932, janvier 1933; *Math. Zeitschrift*, Bd. 38, janvier 1934; *Studia Math.*, Bd. 5, 1934). Je pars de quelques théorèmes bien connus de la théorie du potentiel (théorèmes relatifs aux équations de Laplace et de Poisson) et je les étends *directement* et assez vite à l'équation générale linéaire du type elliptique. J'obtiens ainsi les limitations précises, essentielles pour les recherches ultérieures. On ne se sert plus ici des solutions élémentaires, des fonctions de Green ni des potentiels généralisés. C'est ce dernier procédé que je vais exposer dans cette conférence.

Considérons une équation générale du second ordre et du type elliptique

$$\sum_{i,k=1}^n a_{ik} \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_k} = f. \quad (1)$$

On impose maintenant très peu de restrictions aux coefficients a_{ik} ; il suffit, par exemple, qu'ils satisfassent à une condition de Hölder. Les méthodes antérieures, celles de LICHTENSTEIN, de STERNBERG exigeaient que les a_{ik} soient deux fois dérivables. Mais la diminution du nombre d'hypothèses imposées aux coefficients est loin d'être seulement un effort de nature sportive! Si vous vous êtes occupés une seule fois, Messieurs, d'équations aux dérivées partielles non linéaires, vous savez bien que cette théorie exige de la théorie des équations linéaires les résultats les plus précis et les plus subtils.

I.

Le point de départ de la méthode directe dont nous voulons maintenant donner une esquisse, consiste en quelques limitations des solutions de l'équation de Laplace

$$\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2} + \dots + \frac{\partial^2 u}{\partial x_n^2} = 0 \quad (2)$$

et de l'équation de Poisson

$$\Delta u = f(x_1, x_2, \dots, x_n). \quad (3)$$

M. A. KORN s'occupa le premier, en 1907, de telles évaluations; elles furent ensuite traitées par beaucoup d'auteurs.

Introduisons ici quelques notations. Nous appelons norme de la fonction f dans le domaine G l'expression

$$\|f\|_{\alpha}^G = \text{Max}_G |f| + \text{la plus petite constante de Hölder.} \quad (4)$$

c'est-à-dire la plus petite constante C satisfaisant à l'inégalité

$$|f(P_1) - f(P_2)| \leq Cr_{12}^{\alpha}, \quad 1 > \alpha > 0, \quad (5)$$

P_1, P_2 étant des points du domaine G et r_{12} leur distance. Pareillement, f étant une fonction dérivable m fois dans G et dont les dérivées d'ordre m satisfont à la condition de Hölder, nous appelons $\|f\|_{\alpha, m}^G$, l'expression

$$\|f\|_{\alpha, m}^G = \text{Max}_G |f| + \Sigma \|D_1 f\|_{\alpha}^G + \dots + \Sigma \|D_m f\|_{\alpha}^G \quad (6)$$

chaque sommation étant ici étendue à toutes les dérivées d'ordre considéré.

Envisageons maintenant l'équation (3), où f remplit la condition de Hölder, dans une sphère K_R de rayon R . On sait (d'après M. A. Korn) que la solution de (3), s'annulant sur la frontière de K_R , admet dans K_R fermée les dérivées secondes continues et satisfaisant à la condition de Hölder avec le même exposant α ; en outre nous avons l'inégalité

$$\|u\|_{\alpha, 2}^{K_R} \leq C \|f\|_{\alpha}^{K_R} \quad (7)$$

où la constante C ne dépend pas de R .

D'autre part envisageons l'équation homogène (2) dans un domaine G borné dont une partie de la frontière entière S est un hyperplan H . Supposons u bornée dans G . Quant aux valeurs aux limites que nous désignerons par $\varphi(s)$ (s étant un point de H ou de S), elles doivent admettre sur H des dérivées secondes¹, satisfaisant à la condition de Hölder avec l'exposant α . Alors dans

¹ Bien entendu, les dérivées de φ sont calculées par rapport aux variables paramétriques qui caractérisent la portion donnée de la surface H .

le voisinage U de chaque point P situé à l'intérieur ¹ de H la fonction u possède des dérivées du second ordre « Hölderiennes » En outre l'inégalité

$$\| u \|_{\alpha, 2}^U \leq C \left(\| \varphi \|_{\alpha, 2}^V + \text{Max}_G | u | \right) \quad (8)$$

subsiste ².

Cette généralisation du théorème concernant l'équation de Laplace qui consiste à supposer la régularité des valeurs aux limites sur une *portion* seulement de la frontière et non pas sur la frontière entière, est une des bases de notre procédé.

II.

Les deux théorèmes que nous venons d'énoncer et les évaluations correspondantes s'étendent facilement aux équations homogènes ou non homogènes du type elliptique dont les coefficients a_{ik}^0 sont *constants*;

$$L^0 u = \sum_{i,k=1}^n a_{ik}^0 \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_k} = 0, \quad (a_{ik}^0 = a_{ki}^0) \quad (9)$$

$$L^0 u = \sum_{i,k=1}^n a_{ik}^0 \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_k} = f.$$

Il suffit de remarquer que $L^0 u$ se transforme en Δu par une substitution linéaire des variables x_1, x_2, \dots, x_n . En supposant le déterminant des $a_{ik}^0 = 1$ et

$$| a_{ik}^0 | \leq m, \quad (10)$$

(ce qui ne diminue pas la généralité) nous obtenons

$$\| u \|_{\alpha, 2}^K \leq C(m) \| f \|_{\alpha}^K \text{ pour l'équation } L^0 u = f, \quad (11)$$

$$\| u \|_{\alpha, 2}^U \leq C(m) \left(\| \varphi \|_{\alpha, 2}^V + \text{Max}_G | u | \right) \text{ pour } L^0 u = 0.$$

¹ U est le produit d'une sphère à n dimensions et de l'ensemble $G + S$.

² $\| \varphi \|_{\alpha, 2}^H$ est aussi calculée par rapport aux paramètres locaux sur H .