Zeitschrift: L'Enseignement Mathématique
Herausgeber: Commission Internationale de l'Enseignement Mathématique
Band: 35 (1936)
Heft: 1: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE

Artikel: ÉQUATIONS DU TYPE ELLIPTIQUE, PROBLÈMES LINÉAIRES
Autor: SCHAUDER, J.
Kapitel: III.
DOI: https://doi.org/10.5169/seals-27308

Nutzungsbedingungen
Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Mehr erfahren

Conditions d'utilisation
L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. En savoir plus

Terms of use
The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. Find out more

Download PDF: 15.07.2025

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, https://www.e-periodica.ch

Cette évaluation diffère de la précédente seulement par le fait que, maintenant, la constante C dépend de m. On peut d'ailleurs trouver aisément la forme exacte de la fonction $C(m)$.

III.

Passons maintenant à l'équation générale

$$L(u) = \sum_{i,k=1}^{n} a_{ik}(x_1, x_2, \ldots, x_n) \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_k} = f . \tag{12}$$

Nous supposons $|a_{ik}| \leq m$, les constantes de Hölder des $a_{ik} \leq M$, le déterminant des $a_{ik} = 1$ et nous considérons d'abord la solution de (12) à l'*intérieur*[1] du domaine borné G, le second membre f étant Hölderien ($\|f\|_{\alpha}^{G} < \infty$). Nous supposons en plus qu'une limitation de u est connue dans tout le domaine G et que u ainsi que ses dérivées secondes satisfont à la condition de Hölder à l'intérieur de G (mais pas nécessairement sur la frontière S). Cherchons une limitation de $D_1 u$, $D_2 u$ et des constantes de Hölder pour $D_2 u$ à l'intérieur de G. Soulignons, que nous *ne sommes pas* en train de construire une solution; la solution u de (12) est donnée, ses dérivées sont régulières et notre but est d'établir quelques inégalités. Notre procédé est le suivant: Soit P un point intérieur à G, $d(P)$ sa distance de la frontière du domaine G et λ un nombre (arbitraire) de l'intervalle $< 01 >$: $0 \leq \lambda \leq 1$. Construisons un cube $W(P, \lambda)$ à n dimensions, de centre P et de côtés parallèles aux axes; la longueur des côtés est égale à $\frac{2}{\sqrt{n}} \lambda d(P)$. Nous nous proposons de trouver la borne supérieure de la fonction

$$\left[d(P)\right]^{\alpha+2} \| u \|_{\alpha, 2}^{W(P, \lambda)} \overset{df}{=} h(P, \lambda)$$

pour λ constant. Désignons cette borne, qui d'ailleurs est finie, par $N(\lambda)$. Soit P_0 un point intérieur à G tel que

$$\left[d(P_0)\right]^{2+\alpha} \| u \|_{\alpha, 2}^{W(P_0, \lambda)} \geq \frac{N(\lambda)}{2} . \tag{13}$$

[1] A la fin de ce paragraphe nous donnerons une évaluation analogue sur la frontière et dans son voisinage.

En écrivant l'équation (12) sous la forme

$$L^0 u = \sum_{i,k=1}^{n} a_{ik}(P_0) \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_k} = \sum_{i,k=1}^{n} \left[a_{ik}(P_0) - a_{ik}(P)\right] \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_k} + f , \tag{14}$$

nous pouvons appliquer les résultats obtenus plus haut pour l'équation à coefficients constants à

$$L^0 u = \Psi , \tag{15}$$

où

$$\Psi = \Sigma \left[a_{ik}(P_0) - a_{ik}(P)\right] \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_k} + f . \tag{16}$$

Nous ne reproduirons pas ici tout le calcul (qui, d'ailleurs, ne dépasse pas l'étendue d'une page et demie [1]); le résultat en est

$$\| u \|_{\alpha, 2}^{W(P_0, \lambda)} \leq K(m, M) \left\{ \| u \|_{\alpha, 2}^{W(P_0, \lambda)} \cdot \lambda^{\alpha} \left(d(P_0)\right)^{\alpha} + \frac{\operatorname{Max} |u|}{\lambda^{2+\alpha} \left[d(P_0)\right]^{2+\alpha}} + \dots \right\} \tag{17}$$

K dépend de M, c'est-à-dire de la constante de Hölder des coefficients a_{ik}; on peut trouver facilement la forme exacte de cette dépendance. D étant le diamètre du domaine G, définissons λ_0 par la relation

$$K(m, M) \lambda_0^{\alpha} D^{\alpha} = \frac{1}{2} ; \tag{18}$$

l'inégalité précédente devient alors

$$\| u \|_{\alpha, 2}^{W(P_0, \lambda)} \leq \frac{1}{2} \| u \|_{\alpha, 2}^{W(P_0, \alpha)} + K(m, M) \frac{\operatorname{Max} | u |}{\lambda_0^{2+\alpha} \left[d(P_0)\right]^{2+\alpha}} + \dots . \tag{19}$$

En transportant $\frac{1}{2} \| u \|_{\alpha, 2}^{W(P_0, \lambda)}$ dans le premier membre de l'inégalité (19) et en la multipliant ensuite par $\left[d(P_0)\right]^{2+\alpha}$, nous obtenons

$$\| u \|_{\alpha, 2}^{W(P_0, \lambda)} \cdot \left[d(P_0)\right]^{2+\alpha} \leq K_1(m, M) \left[\| f \|_{\alpha}^{G} + \operatorname*{Max}_{G} | u | \right] , \tag{20}$$

d'où nous tirons, en vertu de (13), une limitation pour $N(\lambda)$.

---

[1] Voir mes publications indiquées plus haut et particulièrement la *Math. Zeitschrift.*

Ce raisonnement reste valable pour l'équation plus générale

$$\sum_{i,k=1}^{n} a_{ik} \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_k} + \Sigma b_j \frac{\partial u}{\partial x_j} + cu = f . \tag{21}$$

Passons maintenant à la limitation dans *le voisinage de la frontière.* Il faut alors ajouter à nos hypothèses la supposition suivante:

Dans un voisinage U d'une portion H de la frontière [1] les dérivées secondes de u satisfont à la condition [2] de Hölder ; $\|u\|_{\alpha,2}^{U} < \infty$. φ étant les valeurs aux limites, nous prouvons, par un procédé tout à fait semblable au précédent, une limitation pour $\|u\|_{\alpha,2}^{U'}$ dans chaque domaine U′ intérieur à U. Il suffit de transformer H en un hyperplan H′ et d'appliquer les limitations précédentes [3].

IV.

Nous démontrerons maintenant qu'on peut *déduire les théorèmes d'existence des limitations précédentes.* Commençons par l'équation

$$L(u) = \sum_{i,k=1}^{n} a_{ik} \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_k} = f \tag{22}$$

et par des valeurs aux limites ayant des dérivées secondes Hölderiennes (problème de Dirichlet).

Envisageons l'ensemble d'équations du type elliptique dépendant d'un paramètre λ

$$\Sigma a_{ik}^{(\lambda)} \frac{\partial^2 u^{(\lambda)}}{\partial x_i \partial x_k} = f \tag{23}$$

et telles que l'on ait $a_{ik}^{(0)} = \delta_{ik}$ (symbole de Kronecker), mais $a_{ik}^{(1)} = a_{ik}$. Pour $\lambda = 0$ nous obtenons alors l'équation de Poisson

$$\Delta u^{(0)} = f$$

---

1 Voir note 1, p. 129.

2 C'est-à-dire les dérivées secondes satisfont à la condition de Hölder dans l'ensemble envisagé.

3 Voir l'inégalité (8).