

# VII.

Objektyp: **Chapter**

Zeitschrift: **L'Enseignement Mathématique**

Band (Jahr): **35 (1936)**

Heft 1: **L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE**

PDF erstellt am: **30.06.2024**

## **Nutzungsbedingungen**

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern. Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

## **Haftungsausschluss**

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

J'ai appliqué ces résultats dans une deuxième note dans les *C. R.*<sup>1</sup> à l'équation elliptique quasilineaire

$$\begin{aligned} A(x, y, z, p, q)r + 2B(x, y, z, p, q)s + C(x, y, z, p, q)t \\ = D(x, y, z, p, q) \end{aligned} \quad (29)$$

$$AC - B^2 > \Delta > 0$$

à coefficients *continus* et bornés en  $x, y, z, p, q$ . Le problème de Dirichlet est ici toujours résoluble dans le sens que nous venons de préciser<sup>2</sup>. On obtient ce résultat par l'application du théorème du point invariant sous la forme exposée dans mon travail dans les *Studia Math.*, 2, pp. 171-180<sup>3</sup>. C'est en quelque sorte une généralisation de mes résultats antérieurs concernant l'équation de forme normale

$$\Delta z = f(x, y, z, p, q),$$

où  $f$  est seulement continue.

## VII.

Nous avons montré comment on peut traiter le problème de Dirichlet. Les autres problèmes aux limites, la construction de la fonction de Green etc. ne présentent maintenant — il faut le souligner — plus aucune difficulté. Je voudrais exposer ici encore la construction de la fonction de Green<sup>4</sup>.

<sup>1</sup> 26. XII. 1934. La 12<sup>me</sup> ligne de la page 1567 de cette note doit être lue: « limites arbitraires suffisamment régulières ».

<sup>2</sup> Remarquons que la méthode développée ici pour limiter une solution est très générale; nous pouvons de chaque évaluation de solutions des équations de Laplace et de Poisson passer à une évaluation analogue pour les équations elliptiques générales. On peut alors faire différentes hypothèses sur les coefficients  $a_{ik}$ .

<sup>3</sup> Je m'appuie ici sur le théorème II du travail cité p. 175. Remarquons à cette occasion que la démonstration du théorème I (p. 173) de ce travail donne le théorème en question du point invariant seulement pour les espaces métriques et linéaires dans lesquels zéro possède des voisinages convexes arbitrairement petits.

<sup>4</sup> Une fois résolu le problème de Dirichlet il est très facile de construire la fonction de Green  $G(X, E)$ . Dans le cas de l'équation de Laplace cette fonction de Green s'obtient en retranchant de la solution  $\frac{1}{r^{n-2}}$  une fonction harmonique qui sur la frontière est égale à cette solution fondamentale. Dans le cas général on opère de la même façon; on définit immédiatement la partie singulière. On doit alors en retrancher la solution d'un problème de Dirichlet posé pour une équation  $L(u) = f$ .

Posons, comme on le fait souvent dans la théorie des équations du type elliptique de second ordre,

$$R(X, E) = \sum_{r,s=1}^n \alpha_{rs}(E) (x_r - e_r) (x_s - e_s), \quad (30)$$

$X, E$  étant des points de l'espace euclidien à  $n$  dimensions de coordonnées  $x_1, x_2, \dots, x_n$  et  $e_1, e_2, \dots, e_n$ ;  $\alpha_{rs}(E)$  sont les éléments de la matrice inverse de la matrice  $a_{ik}(E)$ . Soit  $\Omega^*$  un domaine borné contenant  $\Omega$  et sa fermeture. Je vais me servir d'une remarque bien connue et employée par beaucoup d'auteurs. Soit  $\rho$  une fonction suffisamment régulière (par exemple Hölderienne) et posons

$$u(X) = -\mu \int_{\Omega^*} \dots \int [R(X, E)]^{\frac{2-n}{2}} \rho(E) d\tau_E, \quad (31)$$

où

$$\mu = -2^{-2} \pi^{-\frac{n}{2}} \Gamma\left(\frac{n}{2} - 1\right).$$

En calculant les dérivées secondes de la fonction  $u$  et en formant<sup>1</sup> l'opérateur  $K_X(u)$  on arrive (par un procédé bien connu de la théorie du potentiel) à l'expression

$$K_X(u) = \rho(X) + c \int_{\Omega^*} \dots \int \lambda[X, E] \rho(E) d\tau_E \quad (32)$$

dont le noyau est

$$\lambda(X, E) = K_X[R(X, E)], \quad (33)$$

$c$  dépendant de  $\mu$ . La dérivation est ici effectuée par rapport à  $X$ . Il n'est pas nécessaire de résoudre une équation intégrale correspondante à (32) ni pour des petits ni pour des grands domaines  $\Omega^*$ . Nous ferons seulement deux remarques:

$\alpha$ )  $\rho(E)$  étant bornée, le résultat  $m(X)$  de l'opération fonctionnelle

$$m(X) = \int_{\Omega^*} \dots \int \lambda(X, E) \rho(E) d\tau_E \quad (34)$$

<sup>1</sup> Il s'agit de l'opérateur  $K$  défini par (24); l'indice inférieur  $X$  indique que la dérivation se fait par rapport à  $X$ .

effectuée sur  $\rho$  satisfait à la condition de Hölder (ce qui se prouve à l'aide de méthodes très simples, employées déjà dans la théorie du potentiel).

$\beta$ ) Le noyau  $\lambda(X, E)$  est singulier et d'ordre  $r^{n-\alpha}$ , où  $r$  désigne la distance des deux points  $X, E$ .

Il est une conséquence de la condition  $\beta$ ) que les ordres des noyaux itérés

$$\lambda^{(1)} = \lambda, \lambda^{(2)}, \lambda^{(3)}, \dots, \lambda^{(i-1)}, \lambda^{(i)}, \dots$$

diminuent successivement et soient bornés à partir d'un indice suffisamment élevé  $i - 1$ . A cause de  $\alpha$ )  $\lambda^{(i)}(X, E)$  satisfait à une condition de Hölder par rapport à la première variable  $X$ .

Envisageons

$$\begin{aligned} R'(X, E) &= [R(X, E)]^{\frac{2-n}{2}} + \mu \int_{\Omega^*} \dots \int R^{\frac{2-n}{2}} \lambda(\bar{E}, E) d\tau_{\bar{E}} + \dots \\ &\dots + \mu^{i-1} \int_{\Omega^*} \dots \int R^{\frac{2-n}{2}} \lambda^{(i-1)}(\bar{E}, E) d\tau_{\bar{E}}. \end{aligned} \quad (35)$$

En vertu de (32) nous avons

$$K_X R'(X, E) = \mu^i \lambda^{(i)}(X, E).$$

Supposons maintenant que le point  $E$ , qui joue le rôle d'un pôle, soit fixe à l'intérieur de  $\Omega$ .  $E$  restant constant, la fonction  $R'(X, E)$  est continue sur la frontière de  $\Omega$ . Considérons dans  $\Omega$  une solution  $u$  de l'équation

$$K_X u = -\mu^i \lambda^{(i)}, \quad E \text{ constant}$$

les valeurs aux limites étant  $-R'(X, E)$ . La fonction  $R' + u = G(X, E)$  est la fonction de Green cherchée s'annulant sur la frontière de  $\Omega$ .

## VIII.

Les évaluations obtenues précédemment qui ont été le point de départ de nos recherches mènent immédiatement à des