

# I. — Généralités concernant les équations FONCTIONNELLES NON LINÉAIRES.

Objekttyp: **Chapter**

Zeitschrift: **L'Enseignement Mathématique**

Band (Jahr): **35 (1936)**

Heft 1: **L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE**

PDF erstellt am: **10.08.2024**

## **Nutzungsbedingungen**

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern.

Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden.

Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

## **Haftungsausschluss**

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

points irréguliers sont les mêmes qu'il s'agisse de l'équation de Laplace ou de l'équation générale linéaire <sup>1</sup>.

Pour terminer je voudrais remarquer que, à l'exception d'un travail de E. E. LEVI fait en 1910, je ne connais point de nouvelles recherches sur l'équation du type elliptique d'ordre  $2p$  ( $p > 1$ ) ni sur des systèmes d'équations (évidemment quelques généralisations faciles sont possibles). Je crois alors que les futurs efforts devraient aller dans cette direction-là.

---

## LES PROBLÈMES NON LINÉAIRES <sup>2</sup>

PAR

Jean LERAY (Paris).

---

### I. — GÉNÉRALITÉS CONCERNANT LES ÉQUATIONS FONCTIONNELLES NON LINÉAIRES.

1. — *Un type particulièrement simple d'espaces abstraits : ceux de M. BANACH.* — Nous envisageons des problèmes dont l'inconnue est un point  $x$  d'un *espace fonctionnel donné*,  $\mathcal{E}$ .

Nous supposons que  $\mathcal{E}$  est un espace abstrait de Banach : on peut combiner linéairement ses points ; une distance est définie ; la distance  $\|x\|$  qui sépare l'origine du point  $x$  est nommée norme de  $x$  ; on a,  $\lambda$  étant une constante réelle,  $\|\lambda x\| = |\lambda| \cdot \|x\|$ .

$\mathcal{E}$  sera par exemple l'espace des fonctions continues, l'espace de Hilbert, l'espace des fonctions hölderiennes d'exposant  $\alpha$ , l'espace des fonctions dont les dérivées premières sont hölderiennes et d'exposant  $\alpha$  ;  $\mathcal{E}$  pourra être éventuellement un espace euclidien.

---

<sup>1</sup> Voir par exemple TAUTZ, *Math. Zeitschr.* Bd. 29, 1935.

<sup>2</sup> Conférence faite le 19 juin 1935 dans le cycle des *Conférences internationales des Sciences mathématiques* organisées par l'Université de Genève ; série consacrée aux *Equations aux dérivées partielles. Conditions propres à déterminer les solutions.*

En général un tel espace n'est pas compact : un domaine borné de  $\mathcal{E}$  ne peut être recouvert à l'aide d'un nombre fini d'hypersphères de rayon  $\varepsilon$ . Par exemple il est impossible de trouver un système, constitué par un nombre fini de fonctions continues, qui présente le caractère suivant : toute fonction continue, dont la plus grande valeur absolue est inférieure à 1, est approchée à  $1/10$  près par un élément au moins de ce système. Un espace qui n'est pas compact a une topologie relativement compliquée.

Nous nommerons *complètement continue* une transformation continue  $\mathcal{F}(x)$  qui transformera tout ensemble borné en ensemble compact. Des critères très aisés permettent d'affirmer qu'une transformation fonctionnelle est complètement continue : si  $\mathcal{E}$  est l'espace des fonctions continues,  $\mathcal{F}(x)$  est complètement continue quand elle transforme des fonctions bornées en des fonctions possédant un même module de continuité ; toutes les transformations fonctionnelles forgées à l'aide d'intégrations sont complètement continues.

*N. B.* — Quand  $\mathcal{E}$  est euclidien, toute transformation continue est évidemment complètement continue.

2. — *La notion de degré topologique dans un espace euclidien ; son application à la discussion d'un système de  $n$  équations à  $n$  inconnues.* — Soit  $y = \Phi(x)$  une transformation continue d'un espace euclidien  $\mathcal{E}$  en lui-même ; nous supposons  $\Phi(x)$  définie sur un domaine  $D$  et sur sa frontière  $D'$ . Le nombre de fois que l'image  $\Phi(D)$  de  $D$  recouvre un point  $b$  varie quand ce point se déplace ; mais comptons un recouvrement comme étant positif quand il conserve l'orientation de l'espace, comme étant négatif dans le cas contraire ; le nombre algébrique de fois que le point  $b$  est recouvert reste constant, tant que  $b$  ne franchit pas l'image  $\Phi(D')$  de la frontière  $D'$  ; ce nombre algébrique est appelé<sup>1</sup> « degré topologique de la transformation  $\Phi(x)$  au point  $b$  ». Ce degré topologique reste constant quand on modifie continûment  $\Phi(x)$ ,  $D$ ,  $b$  sans que  $b$  traverse  $\Phi(D')$ .

La notion de degré topologique permet de discuter le nombre

<sup>1</sup> La relation  $\Phi(x) = b$  représente en fait un système de  $n$  équations à  $n$  inconnues.

des solutions qu'une équation  $\Phi(x) = b$  possède à l'intérieur d'un domaine  $D$ . Énonçons par exemple le *théorème d'existence* suivant: Si l'on peut réduire continûment la transformation  $y = \Phi(x)$  à l'identité,  $y = x$ , sans que l'image de  $D'$  vienne jamais recouvrir le point  $b$ , si  $b$  appartient à  $D$ , alors l'équation  $\Phi(x) = b$  possède au moins une solution. En effet le degré en  $b$  de  $\Phi(x)$  est celui de l'identité, en vertu de la propriété d'invariance du degré: c'est  $+1$ ; le point  $b$  est donc recouvert par l'image  $\Phi(D)$  de  $D$ . C.Q.F.D.

3. — *Impossibilité de définir d'une manière générale le degré d'une transformation continue opérant dans un espace abstrait.* — Il est facile de donner des exemples d'équations fonctionnelles pour lesquelles le théorème d'existence énoncé ci-dessus ne vaut plus:

Considérons l'espace  $\mathcal{E}$  des fonctions continues d'une variable  $s$  qui varie de 0 à 1. Evisageons dans  $\mathcal{E}$  le domaine fonctionnel  $D$  des fonctions  $x(s)$  telles que  $0 < x(s) < 1$ . Soit  $\varphi[x]$  une fonction continue de  $x$ , dont les valeurs sont comprises entre 0 et 1, et qui vaut 0 et 1 en même temps que  $x$ . Nommons  $\Phi(x)$  la transformation fonctionnelle qui associe à  $x(s)$  la fonction  $\varphi[x(s)]$ . Soit un paramètre  $k$  variant de 0 à 1; la transformation  $k\Phi(x) + (1 - k)x$  dépend continûment de  $k$ ; elle coïncide avec l'identité pour  $k = 0$ , avec  $\Phi$  pour  $k = 1$ ; elle transforme tout point de la frontière  $D'$  de  $D$  en point de  $D'$ . Les hypothèses du théorème d'existence sont vérifiées, à cela près que  $\mathcal{E}$  n'est pas euclidien. Or l'équation  $\varphi[x(s)] = b(s)$ , où  $b$  est une fonction continue comprise entre 0 et 1, n'admet en général aucune solution continue  $x(s)$ , si  $\varphi[x]$  n'est pas croissant.

La notion de degré topologique ne peut donc pas être généralisée à une transformation quelconque d'un espace abstrait.

4. — *Un type de transformations des espaces de Banach qui possèdent un degré topologique.* — Considérons tout d'abord une transformation « dégénérée », c'est-à-dire du type suivant:  $y = x + \mathcal{F}_m(x)$ , toutes les valeurs prises par  $\mathcal{F}_m(x)$  appartenant à un sous-ensemble linéaire de  $\mathcal{E}$ ,  $\mathcal{E}_m$ , qui a  $m$  dimensions. Cette transformation dégénérée laisse globalement invariant chaque

hyperplan parallèle à  $\mathcal{E}_m$ . Il est bien naturel de définir son degré topologique en un point  $b$  comme étant son degré quand on la considère dans l'hyperplan parallèle à  $\mathcal{E}_m$  qui passe par  $b$ . On légitime aisément cette définition en prouvant que ce degré reste le même quand on substitue à  $\mathcal{E}_m$  un hyperplan  $\mathcal{E}_n$ , à nombre plus grand de dimensions, qui contient  $\mathcal{E}_m$ . Le degré en un point  $b$  d'une transformation dégénérée, envisagée sur un domaine  $D$ , reste constant quand on modifie continûment  $b$ ,  $D$  et cette transformation sans que  $b$  atteigne l'image de la frontière  $D'$ .

Considérons maintenant une transformation qui soit à  $\varepsilon$  près une transformation dégénérée, quel que soit  $\varepsilon$ ; il est légitime de nommer degré de cette transformation les degrés (égaux à partir d'un certain rang) de ces transformations dégénérées qui l'approchent. *Les transformations en question sont les transformations  $y = x + \mathcal{F}(x)$ , où  $\mathcal{F}(x)$  est complètement continue.* En effet l'ensemble des valeurs prises par  $\mathcal{F}(x)$  appartient à  $m$  sphères de rayon  $\varepsilon$ ; on peut donc approcher, à  $\varepsilon$  près,  $\mathcal{F}(x)$  par une transformation  $\mathcal{F}_m(x)$  dont toutes les valeurs appartiennent à l'hyperplan que déterminent les centres de ces sphères.

5. — *Propriétés d'un certain type d'équations fonctionnelles.* — Soit à étudier les points d'un domaine  $D$  qui satisfont à une équation du type

$$x + \mathcal{F}(x) = 0 .$$

Supposons qu'on sache réduire continûment cette équation à une équation simple, sans qu'aucune de ses solutions atteigne la frontière  $D'$ ; on effectue pratiquement cette réduction en introduisant un paramètre  $k$  ( $0 \leq k \leq 1$ ); l'équation s'écrit

$$x + \mathcal{F}(x, k) = 0 ;$$

pour  $k = 1$  on a l'équation proposée, pour  $k = 0$  on a une équation simple. Le degré topologique au point  $y = 0$  de la transformation  $y = x + \mathcal{F}(x)$  est alors égal à celui de la transformation  $y = x + \mathcal{F}(x, 0)$ ; on le connaît. S'il diffère de zéro l'équation

proposée possède *au moins une solution*. C'est le cas, par exemple, si  $\mathcal{F}(x, 0) \equiv 0$  et si D contient le point  $y = 0$ .

On peut compléter ce théorème d'existence: la solution dont l'existence est assurée peut être rattachée à la solution  $x = 0$ ,  $k = 0$  par un *continu* de solutions de l'équation  $x + \mathcal{F}(x, k) = 0$ .

Envisageons d'autre part la transformation  $y = x + \mathcal{F}(x)$  au voisinage des points où  $x + \mathcal{F}(x) = 0$ ; l'étude locale de cette transformation en ces points se fait à l'aide de l'équation aux variations de l'équation proposée; dans certains cas on arrive à démontrer que tous les recouvrements du point  $y = 0$  sont positifs; si en outre le degré de la transformation  $x + \mathcal{F}(x)$  au point 0 est  $+1$ , un seul recouvrement est possible; on peut ainsi, dans ces circonstances favorables, établir que la solution de l'équation proposée est *unique*.

6. — *Conclusion*. — Quand D est une très grande sphère notre théorème d'existence revêt la forme suivante: Pour pouvoir affirmer que l'équation  $x + \mathcal{F}(x) = 0$  est résoluble, il suffit de démontrer qu'elle ne présente pas de solution *arbitrairement grande* quand on la réduit continûment à une équation telle que  $x = 0$ . Démontrer qu'une équation fonctionnelle a des solutions revient donc à résoudre le problème suivant: assigner des majorantes aux solutions qu'elle possède éventuellement. Il serait d'ailleurs inimaginable qu'on puisse résoudre une équation par un procédé qui ne fournisse pas de renseignement sur l'ordre de grandeur des inconnues. Pour nous, résoudre une équation, c'est majorer les inconnues et préciser leur allure le plus possible; ce n'est pas en construire, par des développements compliqués, une solution dont l'emploi pratique sera presque toujours impossible.

On peut se permettre de considérer ce théorème d'existence comme étant une généralisation au cas non linéaire de l'alternative de Fredholm: soit une équation de Fredholm  $x + \mathcal{L}(x) = b$  (où  $\mathcal{L}(x) = \int K(s, s') x(s') ds'$  est complètement continue); cette équation possède sûrement une solution, sauf si l'équation  $x + \mathcal{L}(x) = 0$  en possède une; or ce cas est justement celui où l'équation proposée admettrait des solutions *arbitrairement grandes*.