3. — Principe de la démonstration du théorème I.

Objekttyp: **Chapter**

Zeitschrift: **L'Enseignement Mathématique**

Band (Jahr): **35 (1936)**

Heft 1: **L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE**

PDF erstellt am: **12.07.2024**

d'une fonction uniforme sur une surface donnée S, dont le laplacien soit égal à une fonction donnée f telle que $\int_S f d\sigma = 0$.

3. — Principe de la démonstration du théorème I.

Considérons, pour fixer les idées, une variété à 3 dimensions sur laquelle on a un cycle à 2 dimensions c^2 non homologue à zéro. Il s'agit de construire une forme exacte de degré 2, régulière sur toute la variété, dont la période relative à c^2 ne soit pas nulle. Une telle forme

$$\omega = \mathrm{A}\, dy\, dz + \mathrm{B}\, dz\, dx + \mathrm{C}\, dx\, dy$$

peut être considérée comme l'expression du débit élémentaire d'un courant électrique (stationnaire) de volume, son intégrale étendue à un champ c à 2 dimensions est alors le débit total à travers c et la condition que la forme soit exacte ($\omega' = 0$ ou $\mathrm{A}'_x + \mathrm{B}'_y + \mathrm{C}'_z = 0$) exprime que le courant est conservatif. Notre problème consiste donc à construire un courant de volume, régulier et conservatif sur toute la variété, dont le débit total à travers c^2 ne soit pas nul.

D'après le théorème de dualité de Poincaré, il existe un cycle à une dimension c^1, dont le nombre algébrique des points d'intersections avec c^2 n'est pas nul: $\mathrm{I}(c^2 . c^1) \neq 0$. Imaginons que les lignes constituant c^1 (lignes fermées et orientées) soient des fils métalliques parcourus par un courant électrique d'intensité constante égale à un. Le débit de ce courant à travers c^2 est égal à $\mathrm{I}(c^2 . c^1)$, donc non nul. Ce courant est d'ailleurs conservatif (car c^1 est fermé). On conçoit ensuite la possibilité d'étaler un peu ce courant, de manière qu'il remplisse une sorte de tube entourant c^1, avec une intensité de volume continue à l'intérieur du tube et nulle sur sa frontière. La forme ω, égale au débit élémentaire de ce courant dans le tube et nulle en dehors, satisfait à toutes les conditions requises.

On voit que, dans l'espace ordinaire, une même entité physique (le courant électrique), est représentée dans un cas par un champ à une dimension (courant linéaire), dans un autre cas par une forme de degré deux (courant de volume). Cela suggère l'idée que dans une variété à n dimensions V, un p-champ et une $(n - p)$-forme doivent être deux aspects d'une même notion plus générale, que j'appellerai courant à p dimensions. Telle est l'idée qui m'a conduit à la démonstration des trois théorèmes dont on vient de parler. Je vais maintenant esquisser la théorie de ces courants et montrer comment elle conduit de manière très naturelle à la théorie des résidus d'intégrales doubles.

4. — Théorie des courants.

Définitions. — Un *p-courant élémentaire* est l'ensemble (c^{p+k}, ω^k) d'un $(p + k)$-champ c^{p+k} et d'une k-forme ω (définie au moins sur c^{p+k}). p est la dimension du courant. Comme $0 \leqq p + k \leqq n$ et $0 \leqq k \leqq n$, l'entier k ne peut prendre que les $n - p + 1$ valeurs $0, 1, \ldots, (n - p)$; il y a $(n - p + 1)$ types de p-courants élémentaires.

Un p-courant est la réunion d'un nombre fini de p-courants élémentaires.

Addition et multiplication par un nombre. — La *somme* $C_1 + C_2$ de deux p-courants C_1 et C_2 est le p-courant formé par la réunion des p-courants élémentaires constituant C_1 et C_2.

Le *produit* du p-courant élémentaire $C = (c, \omega)$ par le nombre λ est le p-courant élémentaire $C = (c, \lambda\omega)$. Pour multiplier un courant quelconque par λ, on multipliera chacun des courants élémentaires qui le constitue par λ.

Conventions de simplification.

$$(c\,,\,\omega) = 0 \quad \text{si} \quad c = 0 \quad \text{ou si} \quad \omega = 0 \quad \text{sur } c\,.$$

$$(\lambda c\,,\,\omega) = \lambda(c\,,\,\omega)\,.$$

$$(c_1, \omega) + (c_2, \omega) = (c_1 + c_2, \omega)\,. \quad (c, \omega_1) + (c, \omega_2) = (c, \omega_1 + \omega_2)\,.$$

Produit de deux courants. — Le produit du p-courant élémentaire (c^{p+k}, ω^k) par le q-courant élémentaire (c^{q+l}, ω^l) est le $(p + q - n)$-courant élémentaire.

$$(c^{p+k}\,,\,\omega^k)\,(c^{q+l}\,,\,\omega^l) = (-1)^{k(n-q-l)}\,(c^{p+k}\,.\,c^{q+l}\,,\,\omega^l\,\omega^k)$$