

Zeitschrift: L'Enseignement Mathématique
Band: 36 (1937)
Heft: 1-2: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE

Artikel: SUR LES PROPRIÉTÉS INFINITÉSIMALES DES ENSEMBLES FERMÉS ET LE PRINCIPE INDUCTIF DE L'ENLACEMENT
Kapitel: IV. AUTRES PROBLÈMES.
Autor: Kaufmann, B.
DOI: <https://doi.org/10.5169/seals-28024>

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. [Siehe Rechtliche Hinweise.](#)

Conditions d'utilisation

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. [Voir Informations légales.](#)

Terms of use

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. [See Legal notice.](#)

Download PDF: 15.10.2024

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>

IV. — AUTRES PROBLÈMES.

11. — Les résultats indiqués plus haut nous permettent de considérer les multiplicités générales comme des éléments à dimension supérieure d'un ensemble. Au moins d'une façon infinitésimale nous pourrions comparer la composition d'un ensemble à partir de multiplicités arbitrairement petites à la composition d'un simplexe à partir de simplexes arbitrairement petits de chaque dimension. Sans doute, ce sont ici les premiers résultats obtenus dans cette direction; ils permettent cependant de poser, aussi globalement, plusieurs autres problèmes. Pour terminer, je voudrais en mentionner quelques-uns ¹.

La tâche consiste en la construction d'un système inductif d'enlacement, correspondant au problème concret donné. En général, la solution de ce problème est facile pour le cas d'ensembles formant des obstacles d'homologie des hypersphères. Dans le cas général d'ensembles enlacés avec des cycles arbitraires, on peut facilement étendre les cycles j fois, si l'on a $j < \left(r - \frac{n+1}{2}\right)$. En conséquence, nous ne pouvons établir des nouveaux théorèmes de pavage que jusqu'à la j -ème dimension. Pour des $j \leq r$ et des $r < n$ arbitraires la solution générale n'existe pas encore ².

¹ D'autres problèmes liés immédiatement à la théorie exposée ici sont indiqués dans les travaux mentionnés dans la bibliographie.

² Ayant déjà terminé le manuscrit de cette conférence, j'ai pu encore démontrer les théorèmes de pavage, de même que les théorèmes énoncés dans le paragraphe 9, pour tous les ensembles fermés à un nombre arbitraire de dimensions dans \mathbb{R}^n . En même temps le problème d'étendre r fois un cycle par rapport à un F arbitraire dans U a été résolu.

La solution repose sur le lemme suivant:

Soient F un ensemble fermé à r dimensions arbitraire dans \bar{U} et Γ^{n-r-1} un cycle arbitraire (mod. 0) à $(n - r - 1)$ dimensions dans $U - F$; $\Gamma^{n-r-1} \not\sim 0$ dans $U - F$. Alors il existe une suite de complexes à $(n - r)$ dimensions $\{K_\nu^{n-r}\}_{\nu=1, 2, \dots}$

$$K_\nu^{n-r} \rightarrow \Gamma^{n-r-1} \quad \text{dans } U, \nu = 1, 2, \dots$$

tels que $\lim_{\nu \rightarrow \infty} \{K_\nu^{n-r} \cap F\}$ soit un ensemble à 0 dimensions.

12. — D'autres problèmes se présentent si l'on veut caractériser les multiplicités classiques à ce nouveau point de vue. La définition de l'ordre des points de multiplicités peut être considérée comme un travail préparatoire dans cette direction.

Soient $\{f_n^h\}$ et $\{f_m^h\}$ pour $n, m = 1, 2, \dots$ deux suites de multiplicités décroissantes à h dimensions ayant un point limite P commun. Si une multiplicité f_μ^h (pour $m = \mu$) contient toutes les f_n^h pour chaque μ arbitrairement grand et si, réciproquement, une multiplicité f_n^h contient presque toutes les f_m^h si grand que soit $n = \nu$, alors nous appelons les suites $\{f_n^h\}$ et $\{f_m^h\}$ *équivalentes* et nous dirons qu'elles définissent le point P comme un point de multiplicités à h dimensions. Si toutes les suites qui définissent un point P comme un point de multiplicités à h dimensions sont équivalentes, nous appellerons P un point de multiplicités *simple*. Il est clair que le nombre (fini ou infini) de suites $\{f_n^h\}$ non équivalentes définissant le point P comme un point de multiplicités à h dimensions peut être considéré comme ordre (à h dimensions) de P .

F étant un ensemble à r dimensions, nous appelons un point P de F point *régulier* si, δ étant un nombre arbitrairement petit, il existe un $\eta < \delta$ et tel qu'une multiplicité à r dimensions de diamètre $\leq \delta$ contienne tous les points de F intérieurs à un voisinage $U(\eta)$. Un ensemble F est dit *régulier* si tous ses points sont réguliers. Il est clair qu'un point régulier de F doit être simple dans la dimension r -ème. Il serait intéressant de savoir si un ensemble fermé F dont tous les points sont des points simples dans la r -ème dimension est régulier lui-même.

Il serait notamment intéressant de savoir si la notion générale de multiplicité permettrait à elle seule de caractériser les multiplicités classiques¹. L'on pourrait essayer d'appliquer ici aussi le principe inductif.

Une multiplicité générale à h dimensions (et notamment dans le sens absolu, c'est-à-dire définie dans $U = R^n$) est appelée *simplement connexe (localement) dans la dimension $(h - 1)$ -ème* si chaque point P de F peut être séparé de chaque point $R \neq P$ de F par une multiplicité à $(h - 1)$ dimensions f^{h-1} placée dans

¹ En se servant des nombres de Betti généralisés M. Lefschetz a résolu ce problème pour des ensembles fermés, M. E. Čech pour des espaces topologiques.

$U(P, \delta)$ (pour chaque δ) et simplement connexe (localement) dans la dimension $(h - 2)$ -ème. L'induction peut ici commencer par f^0 ou f^1 , c'est-à-dire par des cercles topologiques. La question qui se pose est la suivante: *les ensembles à r dimensions, localement simplement connexes dans la $(r - 1)$ -ème dimension, sont-ils des multiplicités classiques* (dans le sens étendu de MM. VAN KAMPEN et PONTRJAGIN) ?¹.

13. — Cette question ne doit pas être confondue avec le problème de caractériser les multiplicités classiques par les propriétés de l'espace complémentaire et notamment avec le problème de la réciproque du théorème de Jordan dans les espaces à un nombre supérieur de dimensions. Ce dernier problème a aujourd'hui de l'intérêt aussi dans R^3 . Il faut ici distinguer entre les conditions locales (dans le sens ordinaire) et les conditions globales qui sont plus essentielles. Les premières peuvent facilement être indiquées de diverses manières; la seule solution dans R^3 connue jusqu'à présent² repose sur l'hypothèse de la connexion simple du domaine complémentaire d'une surface fermée. Il est naturel que la démonstration se serve du théorème de dualité de M. ALEXANDER. Mais je voudrais remarquer ici qu'il existe une forme purement ensembliste de la réciproque du théorème de Jordan dans R^3 .

Pour qu'une surface F à deux dimensions dans R^3 , fermée et régulière (dans le sens indiqué plus haut) dans chaque point soit une sphère topologique il faut et il suffit que chaque section irréductible d'un domaine complémentaire de F soit une multiplicité de Cantor.

La condition de régularité pourrait être remplacée par une autre condition, aussi purement ensembliste³. Bien que la forme de ce théorème soit purement ensembliste, sa démonstration est essentiellement combinatoire et ne pourrait guère être ramenée immédiatement aux théorèmes de dualité. L'on remarque toujours que les problèmes ensemblistes sous une *forme générale*

¹ L'on sait que cette assertion est vraie pour le cas le plus simple $h = 2$.

² Voir R. L. WILDER, *Math. Annalen*, 109 (1933), p. 273.

³ Si l'on voulait se servir de notions plus anciennes, il suffirait d'exiger (localement) que la surface F soit accessible et « unbewallt » à partir des domaines complémentaires.

ne peuvent être résolus que par des moyens combinatoires et conduisent souvent à des nouveaux problèmes combinatoires.

Je ne saurais indiquer à quel point une surface fermée dans R^n et satisfaisant à des conditions analogues, doit être une multiplicité dans le sens classique.

14. — Nous voulons revenir encore à des multiplicités générales.

La supposition suivante indique un problème global très intéressant.

Soit F une variété générale à r dimensions. Soient A^h et B^h deux sous-ensembles fermés à h dimensions de F , pour un $h = 0, 1, \dots, r - 1$ fixe. Nous prétendons qu'il existe toujours une multiplicité de Cantor à $(h + 1)$ dimensions T^{h+1} contenant A^h et B^h .

Ce problème est très lié au problème du *prolongement* des multiplicités arbitrairement petites à h dimensions dans F , et ce dernier présente des analogies avec les surfaces de Riemann. En général, la possibilité d'une analogie même globale entre les ensembles fermés et les espaces de Riemann n'est point absurde. L'on pourrait, par exemple, envisager les multiplicités générales comme des *surfaces pliées une infinité de fois* et les ensembles comme des totalités de telles surfaces; il n'est pas impossible d'avoir une vue des éléments d'accumulation qui se présentent ainsi. Dans R^3 l'on connaît ces éléments qu'on pourrait aussi appeler des « ideal elements ». Il est sûr que les recherches sur la totalité de ces singularités d'un ensemble se feront par les méthodes de la topologie combinatoire.

¹ Il est facile de démontrer cette assertion pour $h = 0$.

Dans R^n l'on peut toujours relier un couple A^h et B^h d'ensembles à h dimensions par une multiplicité de Cantor T^{h+1} . Considérons une suite de décompositions en simplexes $z(\varepsilon^v)$ de R^n dont les diamètres tendent vers 0. Déterminons à partir des $(h + 1)$ — simplexes de $z(\varepsilon^1)$ une variété de Cantor K_1^{h+1} telle que l'on ait $d(A^h + B^h, K_1^{h+1}) < \varepsilon^1$. Ajoutons à K_1^{h+1} un complexe K_2^{h+1} de tous les $(h + 1)$ — simplexes de $z(\varepsilon^2)$ dont la distance de $(A^h + B^h)$ serait inférieure à ε^2 , etc. L'enveloppe fermée de ΣK_v^{h+1} pour $v \rightarrow \infty$ est une multiplicité de Cantor à $(h + 1)$ dimensions, reliant A^h et B^h .