Zeitschrift: L'Enseignement Mathématique

Herausgeber: Commission Internationale de l'Enseignement Mathématique

Band: 36 (1937)

Heft: 1-2: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE

Artikel: SUR LE CALCUL DU POTENTIEL DE L'ELLIPSOIDE HOMOGÈNE PAR LA MÉTHODE DU FACTEUR DE DISCONTINUITÉ

Autor: Plancherel, M.

DOI: https://doi.org/10.5169/seals-28040

SUR LE CALCUL DU POTENTIEL DE L'ELLIPSOÏDE HOMOGÈNE PAR LA MÉTHODE DU FACTEUR DE DISCONTINUITÉ

PAR

M. PLANCHEREL (Zurich).

---

§ 1. *Introduction.* — L'application la plus remarquable que Gustave LEJEUNE DIRICHLET a donnée de sa méthode du « facteur de discontinuité » pour la détermination des intégrales multiples est celle de la réduction à une intégrale simple de l'intégrale triple par laquelle s'exprime le potentiel newtonien de l'ellipsoïde homogène [1]. Dirichlet a vérifié *a posteriori* la formule finale qu'il a obtenue par cette méthode en montrant que la fonction qu'elle représente possède les propriétés caractéristiques du potentiel cherché [2]. Mais, pour obtenir sa célèbre formule, Dirichlet doit permuter à plusieurs reprises l'ordre des intégrations dans des intégrales multiples non absolument convergentes. Si donc, dans la recherche du potentiel de l'ellipsoïde la méthode du facteur de discontinuité veut être mieux qu'une méthode heuristique nécessitant une vérification *a posteriori* du résultat, il est nécessaire de légitimer les permutations effectuées.

---

[1] G. LEJEUNE DIRICHLET. *a)* Sur une nouvelle méthode pour la détermination des intégrales multiples (*Comptes rendus de l'Académie des Sciences* (Paris), vol. 8 (1839) p. 156-160; *Werke* (Berlin, G. Reimer), Bd. 1, p. 377-380). *b)* Ueber eine neue Methode zur Bestimmung vielfacher Integrale (*Abhandlungen der königl. preussischen Akademie der Wissenschaften* (1839), p. 61-79; *Werke*, Bd. I, p. 393-410).

[2] G. LEJEUNE DIRICHLET, *a)* Sur un moyen général de vérifier l'expression du potentiel relatif à une masse quelconque homogène ou hétérogène (CRELLE, *Journal für reine und angewandte Mathematik*, Bd. 32, p. 80-84; *Werke*, Bd. II, p. 11-16). Voir par exemple E. PICARD, *Traité d'Analyse*, 2^{me} édition (Paris, 1901), tome I, p. 189-191.

Dirichlet a bien vu la nécessité d'une telle démonstration et dans son mémoire il indique en passant que l'introduction de « facteurs de convergence » appropriés permettrait de considérer les intégrales à calculer comme limites d'intégrales absolument convergentes auxquelles s'appliquerait en toute rigueur la méthode du facteur de discontinuité [3]. Mais, lorsqu'on essaie de développer les brèves indications qu'il a données à ce sujet, on est vite découragé car la simplicité des calculs disparaît et la marche de la démonstration est rendue pénible par suite des considérations exigées pour rendre rigoureux les passages à la limite nécessités par l'introduction des facteurs de convergence. Aussi n'existe-t-il, à notre connaissance, aucun exposé rigoureux du contenu de son mémoire.

Léopold KRONECKER [4] a traité le problème dans ses *Leçons sur la théorie des intégrales multiples* en utilisant un facteur de discontinuité différent de celui de Dirichlet et déjà utilisé par MERTENS [5] et il s'est préoccupé de donner une démonstration rigoureuse. Mais sa démonstration est lourde et les vingt pages qu'elle exige laissent le lecteur peu satisfait [6]. L'avantage que présente le facteur de discontinuité dont se servent Mertens et Kronecker réside dans le fait qu'il conduit à des intégrales multiples absolument convergentes. Or, on sait maintenant que de telles intégrales peuvent toujours être calculées par itération et que l'ordre des itérations est indifférent. En utilisant systématiquement cette propriété, il est possible d'alléger la démonstration de Kronecker et de l'exposer sous une forme relativement simple et cependant entièrement rigoureuse. C'est ce que nous

---

[3] Voir le dernier alinéa de la note citée sous *a*) dans [1], le premier paragraphe et le septième alinéa du paragraphe 5 de la note citée sous *b*) dans [1].

[4] L. KRONECKER, Vorlesungen über Mathematik. Bd. I (*Vorlesungen über die Theorie der einfachen und der vielfachen Integrale*, herausgegeben von E. Netto, p. 317-341, Leipzig, 1894).

[5] F. MERTENS, De functione potentiali duarum ellipsoidium homogenearum (*Journal für die reine und angewandte Mathematik*, Bd. 63 (1864), p. 360-372).

[6] L'éditeur des Leçons de Kronecker fait à ce sujet la remarque suivante (*loc. cit.* [4], p. 345): « Die nun folgenden Ableitungen hat Kronecker zuerst 1889 und dann in veränderter Form 1891 vorgetragen. Er hebt dabei den für seine Art der Produktion besonders wichtigen Umstand hervor, dass die Gesamtheit der Vorsichtsmassregeln, welche die Methode erfordert, erst im Laufe der Untersuchungen selbst hervortrete, so dass auf Grund späterer Erwägungen häufig Aenderungen in den früheren Beweisführungen nötig werden. Die Spuren dieser Schwierigkeiten sind in der Darstellung wohl nicht ganz zu verwischen ».

voudrions montrer dans cette Note qui se termine par l'exposé de la démonstration de Mertens.

§ 2. *Préliminaires.* — Pour mieux faire ressortir la démonstration du § 3, nous avons réuni dans ce paragraphe toutes les propositions auxiliaires qui lui sont nécessaires.

a) Sur les intégrales multiples. — Les intégrales multiples absolument convergentes ont la propriété de pouvoir se calculer par itération d'intégrales simples ou multiples. Nous admettrons que cette propriété importante, qui sous sa forme la plus générale constitue le théorème de FUBINI, est connue du lecteur [7]. Dans ce qui suit, nous aurons à l'utiliser sous la forme suivante:

Soit Ω le domaine n-dimensionnel des points $x = (x_1, x_2, ..., x_n)$ défini par les inégalités $-\infty \leqq a_\nu < x_\nu < b_\nu \leqq \infty$, $\nu = 1, 2, ..., n$ et $f(x) = f(x_1, x_2, ..., x_n)$ une fonction *continue* du point x à *l'intérieur* de Ω. Répartissons les n variables x_ν en deux groupes de p et de q variables, $p + q = n$, que nous désignerons par $x'_1, x'_2, ..., x'_p$ et $x''_1, x''_2, ..., x''_q$. Représentons par des notations analogues les valeurs correspondantes des a_ν, b_ν. Soient Ω' et Ω'' les domaines p — respectivement q — dimensionnels des points $x' = (x'_1, x'_2, ..., x'_p)$, $x'' = (x''_1, x''_2, ..., x''_q)$ définis par

$$\Omega' : a'_\mu < x'_\mu < b'_\mu , \quad \mu = 1, 2, ..., p ;$$

$$\Omega'' : a''_\nu < x''_\nu < b''_\nu , \quad \nu = 1, 2, ..., q .$$

Alors, si l'une des deux expressions

$$\int_\Omega |f| \, dx , \quad \int_{\Omega'} dx' \int_{\Omega''} |f| \, dx''$$

[7] G. FUBINI, Sugli integrali multipli (*Rendiconti della Reale Accademia dei Lincei* (5), 1907). On pourra consulter Ch.-J. DE LA VALLÉE-POUSSIN, *Intégrales de Lebesgue, fonctions d'ensemble, classes de Baire* (Paris, 1918), p. 50-53; C. CARATHEODORY, *Vorlesungen über reelle Funktionen* (Leipzig und Berlin, 1918), p. 621-641. L'hypothèse de la continuité que nous faisons est superflue pour la validité du théorème. On pourrait d'ailleurs, dans les intégrales absolument convergentes que nous aurons à calculer se passer de ce théorème général et démontrer directement à l'aide de considérations élémentaires la légitimité de l'interversion de l'ordre des intégrations.

a une valeur finie, l'autre lui est égale et les expressions

$$\int\limits_{\Omega} f\,dx \ , \quad \int\limits_{\Omega'} dx' \int\limits_{\Omega''} f\,dx''$$

existent, sont finies et égales entre elles.

Par conséquent, les intégrales itérées

$$\int\limits_{\Omega'} dx' \int\limits_{\Omega''} f\,dx'' \ , \quad \int\limits_{\Omega''} dx'' \int\limits_{\Omega'} f\,dx'$$

sont finies et égales, chaque fois que l'une des trois intégrales

$$\int\limits_{\Omega} |f|\,dx \ , \quad \int\limits_{\Omega'} dx' \int\limits_{\Omega''} |f|\,dx'' \ , \quad \int\limits_{\Omega''} dx'' \int\limits_{\Omega'} |f|\,dx'$$

a une valeur finie.

b) Le facteur de discontinuité. — Le facteur de discontinuité dont se sert Kronecker est

$$\mathrm{D}(l) = \int\limits_{1-i\infty}^{1+i\infty} e^{l\lambda}\,\lambda^{-1}\,d\lambda \ , \tag{1}$$

l est réel. L'intégrale est à prendre dans le plan de la variable complexe λ sur la droite menée par le point $\lambda = 1$ parallèlement à l'axe des imaginaires; elle est à entendre comme « valeur principale » au sens de Cauchy. a désignant dans ce qui suit une quantité positive, $\mathrm{D}(l)$ est donc *définie* par

$$\mathrm{D}(l) = \lim_{a\to\infty} \mathrm{D}_a(l) \ , \qquad \mathrm{D}_a(l) = \int\limits_{1-ia}^{1+ia} e^{l\lambda}\,\lambda^{-1}\,d\lambda \ . \tag{2}$$

Les propriétés suivantes de $\mathrm{D}(l)$ et de $\mathrm{D}_a(l)$ seront utilisées au § 3.

$$\mathrm{D}(l) = \begin{cases} 0 \ , & l < 0 \\ \pi i \ , & l = 0 \\ 2\pi i \ , & l > 0 \end{cases} \tag{3}$$

$$|\mathrm{D}_a(l)| = |\mathrm{D}_a(l) - \mathrm{D}(l)| \leqq \frac{2e^l}{a\,|l|} \ , \qquad \text{si} \quad l < 0 \tag{4a}$$

$$|\mathrm{D}_a(l) - \mathrm{D}(l)| = |\mathrm{D}_a(l) - 2\pi i| < \frac{2e^l}{a\,|l|} \ ; \qquad \text{si} \quad l > 0 \tag{4b}$$

$$\mathrm{D}_a(0) = 2i \operatorname{arctg} a \ , \quad |\mathrm{D}_a(0)| < \pi \ . \tag{4c}$$

Il résulte de ces formules que si $0 < \varepsilon < 1$

$$\lim_{a \to \infty} D_a(l) = 0, \qquad \text{uniformément dans} \quad -\infty < l \leqq \varepsilon \tag{5a}$$

et que

$$\lim_{a \to \infty} D_a(l) = 2\pi i, \qquad \text{uniformément dans} \quad \varepsilon \leqq l \leqq 1 . \tag{5b}$$

Enfin, il existe une constante M telle que pour tout $a \geqq 0$, dans l'intervalle $-\infty < l \leqq 1$

$$| D_a(l) | < M, \qquad (-\infty < l \leqq 1, \quad a \geqq 0) \tag{6}$$

La vérification de (4c) est immédiate. Pour établir (4a) et (4b) on peut appliquer le théorème des résidus à la fonction $e^{l\lambda}\lambda^{-1}$, méromorphe en λ, et au contour formé du segment rectiligne $(1 - ia, 1 + ia)$ et de deux demi-droites I, II parallèles à l'axe réel, allant vers $+\infty$ lorsque $l < 0$ et vers $-\infty$ lorsque $l > 0$. Le résidu au pôle $\lambda = 0$ étant égal à 1, on aura

$$\left(\int_{\mathrm{I}} + \int_{\mathrm{II}} + \int_{1-ia}^{1+ia}\right) e^{l\lambda}\lambda^{-1}\, d\lambda = \begin{cases} 0, & l < 0 \\ 2\pi i, & l > 0 . \end{cases} \tag{7}$$

Or, lorsque $l > 0$,

$$\int_{\mathrm{I}} e^{l\lambda}\lambda^{-1}\, d\lambda = \int_{-\infty - ia}^{1-ia} e^{l\lambda}\lambda^{-1}\, d\lambda = e^{(1-ia)l} \int_{-\infty}^{0} \frac{e^{lu}\, du}{1 + u - ia} .$$

Donc

$$\left| \int_{\mathrm{I}} e^{l\lambda}\lambda^{-1}\, d\lambda \right| \leqq \frac{e^l}{a} \int_{-\infty}^{0} e^{lu}\, du = \frac{e^l}{a\,|l|} .$$

On verrait de même que

$$\left| \int_{\mathrm{II}} e^{l\lambda}\lambda^{-1}\, d\lambda \right| \leqq \frac{e^l}{a\,|l|} .$$

Ces résultats subsistent lorsque $l < 0$, I et II allant dans ce cas vers $+\infty$. Ils ont, comme conséquences, en tenant compte de (7), les formules (3) et les inégalités (4a) et (4b).

Pour démontrer (6), nous remarquerons qu'en vertu de (4a) il suffit de l'établir sous l'hypothèse $-1 \leqq l \leqq 1$. Or, sous cette hypothèse,

$$\mathrm{D}_a(l) = i \int_{-a}^{a} \frac{e^{l(1+iu)}\, du}{1 + iu} = 2ie^l \int_0^a \frac{\cos lu + u \sin lu}{1 + u^2}\, du \, .$$

Donc,

$$|\mathrm{D}_a(l)| \leqq 2e \left| \int_0^a \frac{\cos lu}{1 + u^2}\, du \right| + 2e \left| \int_0^a \frac{u \sin lu}{1 + u^2}\, du \right| \, .$$

Or,

$$\left| \int_0^a \frac{\cos lu}{1 + u^2}\, du \right| < \int_0^\infty \frac{du}{1 + u^2} = \frac{\pi}{2} \, ,$$

$$\left| \int_0^a \frac{u \sin lu}{1 + u^2}\, du \right| \leqq \left| \int_0^a \left(\frac{u \sin lu}{1 + u^2} - \frac{\sin lu}{u} \right) du \right| + \left| \int_0^a \frac{\sin lu}{u}\, du \right| \, .$$

Mais

$$\left| \int_0^a \left(\frac{u \sin lu}{1 + u^2} - \frac{\sin lu}{u} \right) du \right| = \left| l \int_0^a \frac{\sin lu}{lu} \cdot \frac{du}{1 + u^2} \right| \leqq$$

$$\leqq |l| \int_0^\infty \frac{du}{1 + u^2} = |l| \frac{\pi}{2} \leqq \frac{\pi}{2}$$

et

$$\left| \int_0^a \frac{\sin lu}{u}\, du \right| = \left| \int_0^{al} \frac{\sin u}{u}\, du \right| < \int_0^\pi \frac{\sin u}{u}\, du < \pi \, .$$

Il existe donc une constante M vérifiant (6).

c) Nous aurons encore à nous servir plus loin des relations

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{1-i\infty}^{1+i\infty} e^{h\lambda} \lambda^{-2}\, d\lambda = \begin{cases} 0 \, , & h \leqq 0 \\ h \, , & h \geqq 0 \end{cases} \tag{8}$$

qui se vérifient aussi en appliquant le théorème des résidus aux contours d'intégration considérés plus haut et en passant à la limite $a \longrightarrow \infty$. Remarquons que l'intégrale du premier membre de (8) est absolument convergente.

§ 3. *Le potentiel de l'ellipsoïde.* — Soit E l'ellipsoïde

$$\sum \frac{x^2}{\alpha^2} \equiv \frac{x_1^2}{\alpha_1^2} + \frac{x_2^2}{\alpha_2^2} + \frac{x_3^2}{\alpha_3^2} \leqq 1 \tag{9}$$

rapporté à ses axes. Si $\xi = (\xi_1, \xi_2, \xi_3)$ est un point arbitraire et si $\rho^2 = (x_1 - \xi_1)^2 + (x_2 - \xi_2)^2 + (x_3 - \xi_3)^2$ est le carré de la distance des points x et ξ, la valeur au point ξ du potentiel newtonien de l'ellipsoïde E supposé rempli d'une masse de densité constante est proportionnelle à l'intégrale de volume

$$V = V(\xi) = \int_E \frac{dx}{\rho}, \tag{10}$$

où dx représente l'élément de volume $dx_1\, dx_2\, dx_3$ au point $x = (x_1, x_2, x_3)$ [8]. Le calcul de V par la méthode usuelle de la réduction de l'intégrale multiple à l'itération d'intégrales simples échoue ici parce que les limites d'intégration des intégrales simples qui se présentent ne sont pas fixes, mais sont des fonctions de nature compliquée. La méthode du facteur de discontinuité due à Dirichlet consiste précisément à remplacer ces limites d'intégration variables par des limites fixes en multipliant la fonction à intégrer par une expression égale à 1 à l'intérieur et égale à 0 à l'extérieur du domaine d'intégration. La formule (3) donne une expression de cette nature pour le domaine E si on définit l par [9]

$$l = 1 - \Sigma \frac{x^2}{\alpha^2} = 1 - \left(\frac{x_1^2}{\alpha_1^2} + \frac{x_2^2}{\alpha_2^2} + \frac{x_3^2}{\alpha_3^2} \right). \tag{11}$$

Nous aurons donc, d'après (3) et (2),

$$2\pi i V = \int_{\mathfrak{R}^3} \frac{D(l)}{\rho} dx = \int_{\mathfrak{R}^3} \frac{1}{\rho} \lim_{a \to \infty} D_a(l)\, dx, \tag{12}$$

[8] Remarquons une fois pour toutes que dans tout ce qui suit le fait que ρ s'annule au point ξ ne crée aucune difficulté. En introduisant des coordonnées polaires de centre ξ on se rend compte que toutes les fonctions que nous aurons à considérer sous le signe intégrale sont continues à l'intérieur du domaine d'intégration transformé.

[9] Pour simplifier l'écriture, nous laissons de côté les indices sous les symboles Σ et Π. Σf est donc $\sum_{\nu=1}^{3} f_\nu$ et Πf est donc $\prod_{\nu=1}^{3} f_\nu$.

où $\mathfrak{R}^3$ représente l'espace entier. Nous supposerons d'abord que le point ξ n'est pas sur la surface de l'ellipsoïde.

Nous allons montrer qu'il est permis de permuter dans la dernière intégrale les symboles $\int$ et lim, ce qui donnera

$$2\pi i V = \lim_{a\to\infty} \int_{\mathfrak{R}^3} \frac{1}{\rho} D_a(l)\, dx = \lim_{a\to\infty} \int_{\mathfrak{R}^3} \frac{1}{\rho}\left(\int_{1-ia}^{1+ia} e^{l\lambda}\lambda^{-1}\, d\lambda\right) dx \ , \qquad (13)$$

puis d'intervertir l'ordre des intégrations relatives à x et à λ, d'où résultera

$$2\pi i V = \lim_{a\to\infty} \int_{1-ia}^{1+ia} \lambda^{-1}\left(\int_{\mathfrak{R}^3} \frac{e^{l\lambda}}{\rho}\, dx\right) d\lambda \ . \qquad (14)$$

Pour légitimer ces deux opérations, il nous suffira de faire voir que

$$\int_{\mathfrak{R}^3} \frac{1}{\rho}\left(\int_{1-ia}^{1+ia} |\, e^{l\lambda}\lambda^{-1}\, d\lambda\,|\right) dx \qquad (15)$$

est finie, ce qui assure en vertu du § 2 *a*) l'existence de l'intégrale du second membre de (13) et le passage de (13) à (14), puis d'établir que

$$\lim_{a\to\infty} \int_{\mathfrak{R}^3} \frac{1}{\rho}[D(l) - D_a(l)]\, dx = 0 \ ; \qquad (16)$$

ce qui permet de passer de (12) à (13).

Pour démontrer que (15) est finie, on remarque que

$$\lim_{\rho\to\infty} \frac{1}{\rho^2}\Sigma x^2 = 1 \qquad \text{et que} \qquad \Sigma \frac{x^2}{\alpha^2} \geqq 2m\,\Sigma x^2$$

lorsque $\frac{1}{2m}$ désigne le plus grand des nombres α_1^2, α_2^2, α_3^2. Il existe donc une quantité positive ρ_0 (qui dépend de ξ) telle que

$$l < -m\rho^2 \ , \qquad \text{si} \qquad \rho \geqq \rho_0 \ . \qquad (17)$$

Comme

$$\int_{1-ia}^{1+ia} \left|\frac{d\lambda}{\lambda}\right| = N(a)$$

est finie, indépendante de x, on voit que (15) est égale à

$$\mathrm{N}(a) \int_{\mathfrak{R}^3} \frac{e^l}{\rho} dx \, .$$

Il suffit d'introduire un système de coordonnées polaires de centre ξ, et de tenir compte de l'inégalité (17), pour constater que cette intégrale a une valeur finie. Pour démontrer (16) nous introduirons les ellipsoïdes auxiliaires $\mathrm{E}_{-\delta}$, E_{δ} définis par

$$\mathrm{E}_{-\delta} : \Sigma \frac{x^2}{\alpha^2} \leqq 1 - \delta \; ; \qquad \mathrm{E}_{\delta} : \Sigma \frac{x^2}{\alpha^2} \leqq 1 + \delta \, , \qquad 0 < \delta < 1 \, ,$$

et la couche

$$\mathrm{E}_{\delta} - \mathrm{E}_{-\delta} : 1 - \delta < \Sigma \frac{x^2}{\alpha^2} < 1 + \delta \, .$$

Il est évident que le volume de la couche $(\mathrm{E}_{\delta} - \mathrm{E}_{-\delta})$ tend vers zéro avec δ. Prenant $\varepsilon > 0$ arbitrairement petit, nous déterminerons δ par la condition que ce volume soit inférieur à ε et que le point ξ soit hors de cette couche. Appelant $\mathfrak{K}$ la sphère de centre ξ et de rayon ρ_0 suffisamment grand, nous décomposerons l'intégrale (16) en quatre intégrales étendues aux domaines

$$\mathrm{E}_{-\delta} , \quad \mathrm{E}_{\delta} - \mathrm{E}_{-\delta} , \quad \mathfrak{K} - \mathrm{E}_{\delta} , \quad \mathfrak{R}^3 - \mathfrak{K} \, .$$

(4b) montre que dans $\mathrm{E}_{-\delta}$, $\mathrm{D}(l) - \mathrm{D}_a(l)$ tend uniformément vers zéro avec $\frac{1}{a}$, car l y reste compris entre 1 et une quantité positive ne dépendant que de δ, donc de ε. (4a) montre de même que $\mathrm{D}(l) - \mathrm{D}_a(l)$ tend uniformément vers zéro avec $\frac{1}{a}$ dans le domaine $\mathfrak{K} - \mathrm{E}_{\delta}$. Il existe par conséquent une quantité $a_1 > 0$ telle que

$$\left| \left(\int_{\mathrm{E}_{-\delta}} + \int_{\mathfrak{K}-\mathrm{E}_{\delta}} \right) \frac{1}{\rho} \left[\mathrm{D}(l) - \mathrm{D}_a(l) \right] dx \right| < \varepsilon \, , \qquad \text{pour} \quad a > a_1 \, .$$

En vertu de (6) et du choix de δ

$$\left| \int_{\mathrm{E}_{\delta}-\mathrm{E}_{-\delta}} \frac{1}{\rho} \left[\mathrm{D}(l) - \mathrm{D}_a(l) \right] dx \right| < 2 \frac{\mathrm{M} \varepsilon}{d} \, ,$$

en désignant par $d = d(\xi, \delta)$ la borne inférieure des distances du point ξ à un point de $(E_\delta - E_{-\delta})$. En vertu de (17) et de (4a) et par introduction de coordonnées polaires de centre ξ on a

$$\left|\int\limits_{\mathfrak{R}^3-\mathfrak{K}} \frac{1}{\rho}\left[D(l) - D_a(l)\right]dx\right| \leqq \int\limits_{\mathfrak{R}^3-\mathfrak{K}} \frac{2e^l}{a\,|l|}\,\frac{1}{\rho}\,dx < \frac{2}{a}\int\limits_{\mathfrak{R}^3-\mathfrak{K}} \frac{e^{-m\varrho^2}}{m\,\rho^3}\,dx$$

$$= \frac{8\pi}{am}\int\limits_{\varrho_0}^{\infty} \frac{e^{-m\varrho^2}}{\rho}\,d\rho < \frac{8\pi}{a\,\rho_0\,m\sqrt{m}}\int\limits_0^{\infty} e^{-u^2}\,du\ .$$

Il existe donc une quantité $a_2 > 0$ telle que

$$\left|\int\limits_{\mathfrak{R}^3-\mathfrak{K}} \frac{1}{\rho}\left[D(l) - D_a(l)\right]dx\right| < \varepsilon\,, \qquad \text{pour} \quad a > a_2\ .$$

En résumé, pour $a > a_1 + a_2$,

$$\int\limits_{\mathfrak{R}^3} \frac{1}{\rho}\left[D(l) - D_a(l)\right]dx$$

est en valeur absolue inférieure à $2\left(\frac{M}{d} + 1\right)\varepsilon$, ce qui démontre (16).

Pour calculer l'intégrale intérieure de (14)

$$A(\lambda) = \int\limits_{\mathfrak{R}^3} e^{l\lambda}\frac{dx}{\rho}\ ,$$

nous utiliserons un artifice déjà employé par Dirichlet et qui consiste à exprimer par une intégrale quadruple cette intégrale triple. A cet effet, nous effectuons dans l'intégrale

$$\Gamma(s) = \int\limits_0^{\infty} e^{-u}\,u^{s-1}\,du$$

la substitution $u = t\rho^2$ et prenons ensuite $s = \frac{1}{2}$, ce qui donne, puisque $\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}$,

$$\frac{1}{\rho} = \frac{1}{\sqrt{\pi}}\int\limits_0^{\infty} e^{-t\varrho^2}\,t^{-\frac{1}{2}}\,dt\ . \tag{18}$$

La fonction sous le signe intégrale dans (18) étant positive, il est clair qu'en remplaçant $\frac{1}{\rho}$ par (18) dans l'intégrale absolument convergente A (λ) nous obtenons une expression

$$A(\lambda) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{\mathfrak{R}^3} dx \int_0^\infty e^{l\lambda - t\rho^2} t^{-\frac{1}{2}} dt$$

dans laquelle nous avons encore le droit de permuter l'ordre des intégrations. Par suite,

$$A(\lambda) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_0^\infty dt\, t^{-\frac{1}{2}} \int_{\mathfrak{R}^3} e^{l\lambda - t\rho^2} dx \ .$$

Or,

$$\begin{aligned} l\lambda - t\rho^2 &= \lambda\left(1 - \Sigma \frac{x^2}{\alpha^2}\right) - t\Sigma(x - \xi)^2 \\ &= \lambda - \Sigma\left(t + \frac{\lambda}{\alpha^2}\right)x^2 + 2t\Sigma x\xi - t\Sigma\xi^2 \ . \end{aligned}$$

L'intégrale absolument convergente $\int_{\mathfrak{R}^3} e^{l\lambda - t\rho^2} dx$ peut par conséquent se calculer par itération d'intégrales simples dans lesquelles les variables sont séparées

$$\int_{\mathfrak{R}^3} e^{l\lambda - t\rho^2} dx = e^{\lambda - t\Sigma\xi^2} \prod_{i=1}^{3} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\left(t + \frac{\lambda}{\alpha_i^2}\right)x_i^2 + 2t\xi_i x_i} dx_i \ .$$

En utilisant la formule

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-Au^2 + 2Bu} du = \sqrt{\frac{\pi}{A}}\, e^{\frac{B^2}{A}} \qquad (-\pi < \arg A < \pi)$$

qui se déduit de la formule connue

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-u^2} du = \sqrt{\pi} \ ,$$

on obtient

$$A(\lambda) = \pi \int_0^\infty \frac{e^{\lambda\left(1 - \Sigma \frac{\xi^2}{\alpha^2 + t^{-1}\lambda}\right)}}{\sqrt{t}\, \Pi \sqrt{t + \frac{\lambda}{\alpha^2}}} dt \ .$$

Effectuons dans cette intégrale la substitution $t = \frac{\lambda}{u}$

$$A(\lambda) = \frac{\pi}{\lambda}\int_0^{\lambda\infty} \frac{e^{\lambda\left(1-\Sigma\frac{\xi^2}{\alpha^2+u}\right)}}{\Pi\sqrt{1+\frac{u}{\alpha^2}}}du = \frac{\pi}{\lambda}\int_0^{\infty} \frac{e^{\lambda\left(1-\Sigma\frac{\xi^2}{\alpha^2+u}\right)}}{\Pi\sqrt{1+\frac{u}{\alpha^2}}}du .$$

On peut, en effet, comme le montre le théorème de Cauchy, remplacer l'intégration le long du rayon $(0, \lambda\infty)$ par l'intégration le long de l'axe réel positif. Par suite

$$V = \frac{1}{2i}\lim_{a\to\infty}\int_{1-ia}^{1+ia}\frac{d\lambda}{\lambda^2}\int_0^{\infty}\frac{e^{\lambda\left(1-\Sigma\frac{\xi^2}{\alpha^2+u}\right)}}{\Pi\sqrt{1+\frac{u}{\alpha^2}}}du .$$

Ici encore l'intégrale double

$$\int_{1-i\infty}^{1+i\infty}\int_0^{\infty}\frac{e^{\lambda\left(1-\Sigma\frac{\xi^2}{\alpha^2+u}\right)}}{\lambda^2\Pi\sqrt{1+\frac{u}{\alpha^2}}}du\,d\lambda$$

est absolument convergente, car

$$\left|\frac{e^{\lambda\left(1-\Sigma\frac{\xi^2}{\alpha^2+u}\right)}}{\lambda^2\Pi\sqrt{1+\frac{u}{\alpha^2}}}\right| = \frac{e^{1-\Sigma\frac{\xi^2}{\alpha^2+u}}}{|\lambda|^2\,\Pi\sqrt{1+\frac{u}{\alpha^2}}} < \frac{1}{|\lambda|^2\,\Pi\sqrt{1+\frac{u}{\alpha^2}}} .$$

La permutation de l'ordre des intégrations est donc permise:

$$V = \frac{1}{2i}\int_0^{\infty}\frac{du}{\Pi\sqrt{1+\frac{u}{\alpha^2}}}\int_{1-i\infty}^{1+i\infty}\frac{e^{\lambda\left(1-\Sigma\frac{\xi^2}{\alpha^2+u}\right)}}{\lambda^2}d\lambda .$$

Or, d'après (8), l'intégrale intérieure a la valeur $2\pi i\left(1 - \Sigma\frac{\xi^2}{\alpha^2+u}\right)$ ou zéro selon que $1 - \Sigma\frac{\xi^2}{\alpha^2+u}$ est $\geqq 0$ ou est $\leqq 0$.

Il y aura donc, tout naturellement, deux cas à distinguer:

1. Le point ξ est à l'intérieur de l'ellipsoïde. Dans ce cas, $1 - \Sigma \frac{\xi^2}{\alpha^2 + u}$ est $\geqq 0$ pour tout $u \geqq 0$ et

$$V = \pi \int_0^\infty \frac{1 - \Sigma \frac{\xi^2}{\alpha^2 + u}}{\Pi \sqrt{1 + \frac{u}{\alpha^2}}} du \cdot \tag{19}$$

2. Le point ξ est à l'extérieur de l'ellipsoïde. Dans ce cas, $\Sigma \frac{\xi^2}{\alpha^2 + u}$ est une fonction décroissante de u si $u \geqq 0$; la *plus grande racine* u_0 de l'équation $1 - \Sigma \frac{\xi^2}{\alpha^2 + u} = 0$ est positive. Par suite

$$V = \pi \int_{u_0}^\infty \frac{1 - \Sigma \frac{\xi^2}{\alpha^2 + u}}{\Pi \sqrt{1 + \frac{u}{\alpha^2}}} du \,. \tag{20}$$

Nous avons supposé dans nos calculs que le point ξ n'était pas sur la surface de l'ellipsoïde. Il serait facile d'adapter les raisonnements à ce cas. Mais il est inutile de le faire si on se rappelle que le potentiel $V = V(\xi)$ est une fonction continue du point ξ et si on remarque que les seconds membres de (19) et (20) tendent vers la même valeur lorsque les points ξ tendent vers le même point de la surface, car u_0 devient alors nul.

En résumé donc, le potentiel de l'ellipsoïde homogène (9) au point $\xi = (\xi_1, \xi_2, \xi_3)$ est

$$V = \pi \int_{\frac{u_0 + |u_0|}{2}}^\infty \frac{1 - \left(\frac{\xi_1^2}{\alpha_1^2 + u} + \frac{\xi_2^2}{\alpha_2^2 + u} + \frac{\xi_3^2}{\alpha_3^2 + u}\right)}{\sqrt{\left(1 + \frac{u}{\alpha_1^2}\right)\left(1 + \frac{u}{\alpha_2^2}\right)\left(1 + \frac{u}{\alpha_3^2}\right)}} du \,, \tag{21}$$

u_0 désignant la plus grande (algébriquement) des racines de l'équation en u

$$\frac{\xi_1^2}{\alpha_1^2 + u} + \frac{\xi_2^2}{\alpha_2^2 + u} + \frac{\xi_3^2}{\alpha_3^2 + u} = 1 \,.$$

§ 4. *La démonstration de Mertens.* — La démonstration de Kronecker que nous venons d'exposer n'évite pas entièrement la considération d'intégrales non absolument convergentes. L'intégrale D(l), en effet, n'est pas absolument convergente et ceci a nécessité dans le passage de la formule (12) à la formule (14) une étude particulière. Mertens a montré comment, par un artifice ingénieux, on peut éliminer complètement de la démonstration toute considération d'intégrales non absolument convergentes.

Il utilise à cet effet le facteur de discontinuité

$$\frac{\Gamma(m)}{2\pi i}\int\limits_{1-i\infty}^{1+i\infty} e^{\lambda l}\,\lambda^{-m}\,d\lambda = \begin{cases} 0 \quad , & l \leqq 0 \\ l^{m-1} \, , & l \geqq 0 \end{cases} \tag{22}$$

où m est un nombre réel supérieur à 1. Sous cette hypothèse, le premier membre de (22) est une intégrale absolument convergente.

La formule (22) peut s'établir en représentant par l'intégrale de Fourier

$$\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty} dt\, e^{itx}\int\limits_{0}^{\infty} e^{-y}\,y^{m-1}\,e^{-ity}\,dy$$

la fonction égale à zéro si $x \leqq 0$ et égale à $e^{-x}x^{m-1}$ si $x \geqq 0$ et en tenant compte de la relation due à Euler

$$\int\limits_{0}^{\infty} e^{-(1+it)y}\,y^{m-1}\,dy = \frac{\Gamma(m)}{(1+it)^m} \, .$$

On peut aussi calculer le premier membre de (22) à l'aide du théorème de Cauchy, par déformation du chemin d'intégration. Si $l < 0$, le chemin d'intégration peut être remplacé par la demi-droite $(1, \infty)$ parcourue deux fois en sens contraire. Si $l > 0$, il peut être remplacé par un lacet partant de $-\infty$ et y revenant après avoir tourné une fois dans le sens positif autour de l'origine. On peut alors exprimer par la fonction Γ l'intégrale prise le long de ce lacet.

Pour obtenir des intégrales absolument convergentes, Mertens ne calcule pas directement le potentiel $V = V(\xi)$ de l'ellipsoïde homogène, mais celui d'un ellipsoïde où la densité au point x est égale à $l^{m-1} = \left(1 - \Sigma\frac{x^2}{\alpha^2}\right)^{m-1}$, $(m > 1)$. Soit $V(m;\ \xi)$ ce potentiel

$$V(m\ ;\ \xi) = \int\limits_{E} \frac{l^{m-1}}{\rho}\,dx \, . \tag{23}$$

$V(m;\ \xi)$ est une fonction continue de m dans $1 \leqq m < \infty$. Par conséquent

$$V(\xi) = \lim_{m \to 1+0} V(m\ ;\ \xi)\ . \tag{24}$$

En introduisant dans l'intégrale absolument convergente (23) le facteur de discontinuité (22), lui aussi absolument convergent, on peut écrire

$$V(m\ ;\ \xi) = \frac{\Gamma(m)}{2\pi i} \int_{\mathfrak{R}^3} \frac{dx}{\rho} \int_{1-i\infty}^{1+i\infty} e^{\lambda l} \lambda^{-m}\, d\lambda$$

et permuter l'ordre des intégrations dans cette intégrale multiple absolument convergente. Donc,

$$V(m\ ;\ \xi) = \frac{\Gamma(m)}{2\pi i} \int_{1-i\infty}^{1+i\infty} \frac{d\lambda}{\lambda^m} \int_{\mathfrak{R}^3} \frac{e^{\lambda l}}{\rho}\, dx\ .$$

A partir de cette formule les calculs se poursuivent comme au § 3, où nous avons déjà calculé l'intégrale intérieure. On obtient alors

$$V(m\ ;\ \xi) = \frac{\Gamma(m)}{2i} \int_0^\infty \frac{du}{\Pi\sqrt{1+\frac{u}{\alpha^2}}} \int_{1-i\infty}^{1+i\infty} \frac{e^{\lambda\left(1-\Sigma\frac{\xi^2}{\alpha^2+u}\right)}}{\lambda^{m+1}}\, d\lambda\ .$$

L'intégrale relative à λ se calcule à l'aide de (22). u_0 ayant la signification donnée au § 3, il vient alors

$$V(m\ ;\ \xi) = \frac{\pi}{m} \int_{\frac{u_0+|u_0|}{2}}^{\infty} \frac{\left(1 - \Sigma\frac{\xi^2}{\alpha^2+u}\right)^m}{\Pi\sqrt{1+\frac{u}{\alpha^2}}}\, du\ .$$

L'intégrale du second membre étant uniformément convergente relativement à m dans $m \geqq 1$, on peut y passer à la limite $m \longrightarrow 1 + 0$ en y prenant $m = 1$. On retrouve ainsi la formule (21).