

# L'ÉQUIVALENCE, LA DÉFINITION ET LA SOLUTION DU PARADOXE DE RUSSELL

Autor(en): **Perelman, Ch.**

Objektyp: **Article**

Zeitschrift: **L'Enseignement Mathématique**

Band (Jahr): **36 (1937)**

Heft 1-2: **L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE**

PDF erstellt am: **09.08.2024**

Persistenter Link: <https://doi.org/10.5169/seals-28042>

## **Nutzungsbedingungen**

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern. Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

## **Haftungsausschluss**

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

tifs. Mettons  $s_{p+1} = \beta = n$  en nous limitant aux polynômes de degré  $n$  qui ont des coefficients positifs. Le nombre de tels polynômes est égal au nombre d'ensembles des entiers (I) ou  $s_{p+1} = n$ , c'est-à-dire  $\binom{n}{p} \binom{h-n-1}{p}$ .

Si maintenant nous admettons des valeurs négatives pour  $\alpha_p, \alpha_{p-1}, \dots, \alpha_1$ , le nombre des polynômes (P) devient

$$2^p \binom{n}{p} \binom{h-n-1}{p}.$$

Le théorème 1 se déduit de la sommation de ces résultats pour  $p = 0, 1, 2, \dots$ .

La seconde méthode a l'avantage de donner une interprétation directe des termes individuels dans les formules pour  $N(h)$  et  $N(h, n)$ .

Université de Maryland.  
College Park, Etats-Unis.

---

## L'ÉQUIVALENCE, LA DÉFINITION ET LA SOLUTION DU PARADOXE DE RUSSELL<sup>1</sup>

PAR

Ch. PERELMAN (Bruxelles).

---

On entend par équivalence formelle une équivalence établie entre deux fonctions propositionnelles; on dit qu'une telle équivalence est vraie quand, *quelle que soit la valeur de la variable*, les propositions obtenues en remplaçant, dans les deux membres de l'équivalence, la variable par le même argument ont la même valeur, c'est-à-dire sont toutes les deux vraies ou toutes les deux fausses. Une équivalence formelle est fausse quand ceci n'est pas vrai pour toutes les valeurs de la variable.

---

<sup>1</sup> Le présent article complète un travail paru dans *Mind*, vol. XLV, n° 178 (avril 1936), et intitulé « Les Paradoxes de la Logique »; cf. aussi ma communication « Une solution des paradoxes de la logique et ses conséquences pour la conception de l'infini » dans les *Travaux du IX<sup>e</sup> Congrès International de Philosophie*, Vol. VI.

De cette définition de la vérité de l'équivalence formelle, il résulte immédiatement que l'on peut définir *l'univers du discours* comme l'ensemble des valeurs qui satisfont une équivalence formelle vraie; d'autre part, toute équivalence formelle fausse définit l'ensemble des valeurs qui satisfont cette équivalence, et qui est nécessairement différent de l'univers du discours.

Toute équivalence formelle vraie divise l'univers du discours en deux sous-ensembles complémentaires, c'est-à-dire tels que tout élément de l'univers du discours est élément de l'un d'eux. Pour s'en rendre compte, il suffit de distinguer, parmi tous les objets qui vérifient l'équivalence, l'ensemble des objets qui satisfont simultanément chacun de ses membres, et celui des objets qui ne satisfont aucun de ses membres. Comme tout élément de l'univers du discours vérifie l'équivalence, et que celle-ci ne peut être vraie que quand ses deux membres sont ou bien tous les deux vrais, ou bien tous les deux faux, pour la même valeur de la variable, les deux ensembles que nous venons de définir seront complémentaires. La classe nulle se présente alors comme la classe complémentaire de l'univers du discours, dans le cas d'une équivalence formelle entre propositions formelles toujours vraies; en effet, dans ce cas-ci, non seulement l'équivalence est vraie, mais aussi chacun de ses membres est vrai, pour toutes les valeurs de la variable. L'ensemble des objets qui vérifient l'équivalence, tout en ne satisfaisant aucun de ses membres, constitue alors la classe nulle.

A partir d'une équivalence formelle fausse, on obtient des ensembles complémentaires en considérant, d'une part, l'ensemble des valeurs pour lesquelles l'équivalence est vraie et, d'autre part, celui des valeurs pour lesquelles l'équivalence est fausse. Il est d'ailleurs facile de concevoir ces deux ensembles comme ensembles complémentaires à partir d'une équivalence formelle vraie; il suffit de poser l'équivalence avec elle-même de l'équivalence fausse dont on est parti; on déduira de cette équivalence vraie les ensembles complémentaires que l'on désire construire.

Or, une équivalence formelle est fausse, s'il existe une valeur de la variable pour laquelle un membre de l'équivalence devient vrai et l'autre faux. Cette fausseté peut être prouvée de deux

façons : ou bien par l'indication d'un être qui satisfait un membre de l'équivalence sans satisfaire l'autre, ou bien par la démonstration que, pour une valeur de la variable, il est impossible que les deux membres de l'équivalence aient la même valeur.

Il est évidemment impossible d'indiquer des règles permettant de déceler la fausseté d'une équivalence formelle, si cette fausseté dépend de l'existence d'un être. D'autre part, même si elle dépend de la transgression de certains principes, comme la démonstration d'une telle transgression doit se faire à l'intérieur d'un système donné, on ne peut indiquer un système *complet* de règles permettant de l'établir, qu'en connaissant le système particulier à l'intérieur duquel on raisonne.

Il est possible d'affirmer cependant que, dans tout système admettant des équivalences formelles et la notion de négation, on se trouvera devant une équivalence formelle fautive si, pour une valeur de la variable, on peut en déduire l'équivalence d'une proposition et de sa négation. Ce sera toujours le cas pour une expression qui posera l'équivalence d'une fonction et de sa négation, l'un des deux membres de l'équivalence pouvant, en outre, différer de l'autre par l'introduction d'un argument à la place d'une variable. Sera également fautive toute équivalence formelle dont il est possible de déduire une fautive équivalence formelle ; or, on peut toujours déduire une fautive équivalence formelle d'une équivalence formelle affirmée vraie pour toutes les valeurs de ses variables qui sont, d'une part, des fonctions, et d'autre part, les arguments de ces fonctions, *chaque fois qu'un des membres d'une telle équivalence contient une constante à la place de la variable fonction*. On en déduira une fautive équivalence en remplaçant cette variable par une valeur particulière, à savoir la négation de la constante se trouvant dans l'autre membre.

Si, malgré la démonstration de la fausseté d'une équivalence, quelqu'un continuait à la considérer comme vraie — ce qui revient à poser une contradiction — il serait amené à de graves difficultés. En effet, la valeur de la variable ne vérifiant pas l'équivalence, et étant quand même censée la vérifier, ne ferait partie ni de l'ensemble des valeurs satisfaisant les deux membres

de l'équivalence ni de celui ne satisfaisant aucun des deux; on considérerait l'un quelconque de ces ensembles comme mal défini, et l'on affirmerait que le principe du tiers-exclu ne vaut pas pour toutes les valeurs de la fonction propositionnelle «  $x$  est élément du dit ensemble », puisqu'il y a une valeur de la variable qui ne fait partie ni de l'ensemble ni de son complémentaire. A partir de la dite fonction propositionnelle, on serait amené à généraliser en cherchant à définir les propositions auxquelles le principe du tiers-exclu est applicable et celles auxquelles il ne l'est pas.

Dans ce qui suit, nous montrerons comment le débat concernant les fondements de la théorie des ensembles est parti du cas d'une fausse équivalence, considérée comme vraie. Pour le comprendre, il est nécessaire d'exposer les rapports existant entre l'équivalence formelle et la définition.

Toute définition nominale pose une équivalence formelle. S'il s'agit de la définition d'un signe qui ne représente pas une fonction propositionnelle, l'équivalence s'énoncera: quel que soit  $x$ , «  $x$  est désigné par le signe définissant » équivaut à «  $x$  est désigné par le signe défini ». S'il s'agit, en revanche, de la définition d'un signe de fonction propositionnelle, il découlera immédiatement de la définition que, pour tout objet, dire qu'il satisfait la fonction propositionnelle définissante équivaut à l'affirmation qu'il satisfait la fonction propositionnelle définie.

Les considérations qui précèdent s'appliquent, en particulier, à la définition — si fondamentale dans la théorie des ensembles, et qui relie celle-ci à la théorie des fonctions propositionnelles —, de la notion «  $x$  est élément de  $E$  ».

Toute définition d'un ensemble, et j'entends par là également l'indication d'une loi de construction d'un ensemble, consiste dans la présentation d'une propriété que tous les éléments de l'ensemble possèdent et qu'ils sont seuls à avoir. Ceci a permis de définir la notion « être élément de ( $\varepsilon$ ) » par la notion reprise à la théorie des fonctions propositionnelles « satisfaire la fonction servant de définition à l'ensemble ». Symboliquement, on écrira:

$$(\varphi)(y) : y \varepsilon \hat{x} \cdot \varphi x \cdot \equiv \cdot \varphi y . \quad (1)$$

Pour exprimer le fait qu'un objet est élément d'un ensemble particulier, disons A, on remplacera dans l'équivalence (1), affirmée vraie pour tous les  $\varphi$ , la variable  $\varphi$  par la fonction particulière servant de définition à A.

Or Russell a découvert que, pour une valeur particulière de  $\varphi$  et pour une valeur particulière de  $y$ , l'affirmation de la vérité de l'équivalence (1) conduisait à une antinomie.

Remplaçons, en effet,  $\varphi$  par la fonction particulière  $\sim x \varepsilon x$ . On obtient l'équivalence:

$$(y) : y \varepsilon \hat{x} \cdot \sim x \varepsilon x \cdot \equiv \cdot \sim y \varepsilon y . \quad (2)$$

Quand on donne à  $y$  la valeur  $\hat{x} \cdot \sim x \varepsilon x$ , on obtient la proposition

$$\hat{x} \cdot \sim x \varepsilon x \varepsilon \hat{x} \cdot \sim x \varepsilon x \cdot \equiv \cdot \sim \hat{x} \cdot \sim x \varepsilon x \varepsilon \hat{x} \cdot \sim x \varepsilon x ,$$

qui affirme l'équivalence d'une proposition et de sa négation, et qui est donc évidemment fausse.

Après la constatation de la fausseté de cette dernière proposition, une seule solution s'imposait: il aurait fallu reconnaître la fausseté de l'équivalence formelle (2), dont cette proposition découlait; on voit, en effet, que, dans cette équivalence, le second membre constitue la négation du premier, dans lequel on a remplacé, par une de ses valeurs, la variable se trouvant à droite de  $\varepsilon$ . L'équivalence (2) constitue un cas particulier de l'équivalence formelle

$$(x) \cdot x R a \cdot \equiv \cdot \sim x R x ,$$

dont la fausseté éclate quand on remplace  $x$  par  $a$ .

Il y avait cependant un inconvénient à reconnaître la fausseté de l'équivalence (2): c'est qu'elle découle de l'équivalence (1), de la vérité de laquelle on peut difficilement douter. Il est difficile de s'imaginer, en effet, comment un objet pourrait satisfaire une fonction servant de définition à un ensemble et ne pas être élément de cet ensemble, ou réciproquement. Cependant, si l'on considère de plus près l'équivalence (1), il est facile de comprendre comment un tel fait peut se produire. Car,

alors que le second membre de cette équivalence ne contient que des variables, le premier contient une constante, « $\varepsilon$ »; on y pose une relation, celle d'être élément de, entre une relation et une expression qui désigne un ensemble chaque fois que l'on remplace  $\varphi$  par une fonction particulière; il suffira de remplacer  $\varphi$ , comme nous l'avons indiqué plus haut, par la négation de la relation  $\varepsilon$  pour voir apparaître la contradiction.

Les logiciens qui se sont occupés de la question, au lieu d'admettre la solution la plus simple qui consiste à affirmer la fausseté de l'équivalence (1), ont cherché à établir des règles ne permettant pas de passer de l'équivalence (1) à l'équivalence (2), ou de l'équivalence (2) à la proposition contradictoire qui en découle. La première règle, celle que préconisait Henri Poincaré, interdira les définitions non-prédicatives, et l'on considérera, par conséquent, la définition de l'ensemble  $\hat{x} \cdot \sim x \varepsilon x$  comme illégitime; la deuxième règle, suggérée par Frege<sup>1</sup>, empêchera que, dans l'équivalence (2), l'ensemble  $\hat{x} \cdot \sim x \varepsilon x$  puisse être considéré comme une valeur de  $y$ . D'autres enfin, admettant tout ce que nous avons déduit de l'équivalence (1), considéreront qu'il y a des objets qui peuvent n'être élément ni d'un ensemble ni de son complémentaire, et limiteront, par conséquent, l'application du principe du tiers exclu. Or, chacune de ces prescriptions nouvelles, constituant une certaine refonte des principes de la logique, présentait peut-être des conditions suffisantes pour éviter les contradictions apparues dans la logique et la théorie des ensembles, mais ces conditions n'étaient point nécessaires. En effet, des propositions parfaitement valables — et que l'on voudrait conserver — étaient devenues inadmissibles à cause de l'introduction de ces nouvelles règles.

Pour éviter toutes ces difficultés, il suffit de s'en tenir au respect absolu du principe de contradiction et de remarquer que, *si toute définition pose une équivalence formelle, cette équivalence n'est pas toujours vraie.*

Quand on parvient à démontrer la fausseté d'une telle équivalence, deux attitudes sont possibles: on peut rejeter, comme contradictoire, la définition dont découle une fausse équivalence

<sup>1</sup> G. FREGE, *Grundgesetze der Arithmetik*, vol. II, Jena, 1903, p. 262.

formelle; ou bien — et c'est la solution de loin la plus économique — on peut restreindre la portée de la définition à l'ensemble des valeurs pour lesquelles l'équivalence formelle découlant de la définition est vérifiée. Dans ce cas-là, on ne dira pas que tout objet de l'univers du discours fait partie de l'ensemble des valeurs qui satisfont les deux membres de l'équivalence ou de celui des valeurs qui ne satisfont aucun des deux, mais que *font partie de l'un de ces deux ensembles seulement les objets qui vérifient l'équivalence formelle*. Il en résulte que, alors que toute définition posant une équivalence formelle vraie divise l'univers du discours en deux ensembles complémentaires, une définition dont découle une équivalence formelle fausse ne divise en deux ensembles complémentaires que *l'ensemble des valeurs vérifiant cette équivalence*.

On évitera aisément toutes ces difficultés en ne traitant pas comme des équivalences formelles vraies celles qui ne le sont pas. Et en particulier, on évitera de tomber dans la contradiction suscitée par le paradoxe de Russell, en remarquant que l'équivalence (2), qui sert de définition à l'ensemble de tous les ensembles qui ne sont pas un de leurs éléments, est une équivalence formelle qui n'est pas vraie pour tous les objets de l'univers du discours.

---