

**Zeitschrift:** L'Enseignement Mathématique  
**Herausgeber:** Commission Internationale de l'Enseignement Mathématique  
**Band:** 36 (1937)  
**Heft:** 1-2: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE

**Buchbesprechung:** Stanislaw Saks. — Theory of the Integral. Deuxieme edition. Traduction anglaise de L. C. Young, avec deux Notes du Prof. Stefan Banach (Monografie matematyczne, Tome VII). — Un volume gr. in-8° de viii-348 pages. Prix: 5 dollars U.S.A. Warszawa-Lwów. G.-E. Stechert & Co, New-York, 1937.

**Autor:** Buhl, A.

### **Nutzungsbedingungen**

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. [Siehe Rechtliche Hinweise.](#)

### **Conditions d'utilisation**

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. [Voir Informations légales.](#)

### **Terms of use**

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. [See Legal notice.](#)

**Download PDF:** 15.01.2025

**ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>**

révolution. Ceci est compatible soit avec un équilibre relatif soit avec un mouvement permanent de molécules animées de vitesses différentes.

Avec les idées de Hamy et les surfaces de niveau ellipsoïdales on arrive à des méthodes d'approximation enfermant les figures d'équilibre *entre* des figures ellipsoïdales; d'où les figures dérivées des ellipsoïdes. La question de l'aplatissement, qui préoccupait déjà Clairaut, peut être suivie ici, par continuité, depuis les figures voisines de la sphère jusqu'à celles voisines du disque aplati. Un anneau équatorial, non séparé, peut apparaître.

La figure de la Terre est encore un problème de Clairaut ingénieusement repris par Poincaré avec une transformation de Radau. La recherche des *lois de densités* ne va pas sans d'intéressantes considérations limites en dehors desquelles nous arrivons peut-être aux tremblements de terre et à de certains déplacements polaires.

Les théories limites à la Clairaut s'appliquent à Jupiter et à Saturne. Au delà, nous sommes dans les généralités cosmogoniques qui, comme il est indiqué plus haut, peuvent s'étendre au monde stellaire. M. Véronnet attribue, aux méthodes étudiées, une grande puissance synthétique. Il les considère comme assez avancées pour satisfaire, à la fois, géologie et cosmogonie. Quoi qu'il en soit, la liaison est possible.

Les travaux de MM. Dive et Wavre n'ont pas été oubliés; M. Véronnet en fait le résumé « avec les remarques et les réserves qu'ils suggèrent ». Très impartialement et avec le vif désir de ne pas envenimer la question, nous noterons, comme un fait, que du côté de MM. Dive et Wavre il y a aussi quelques réserves concernant l'exposition de M. Véronnet.

Personnellement je regrette de ne pas trouver davantage, dans cette exposition, l'influence des *Gleichgewichtsfiguren rotierender Flüssigkeiten* de Léon LICHTENSTEIN (voir *L'Ens. math.*, **32**, 1933, p. 112). Malgré tout, M. Véronnet a fait une belle œuvre dont quelques incertitudes mêmes pourront engendrer de nouveaux travaux. On ne peut guère demander mieux à un ouvrage d'enseignement concernant un domaine éminemment fluide.

A. BUHL (Toulouse).

Stanisław SAKS. — **Theory of the Integral**. Deuxième édition. Traduction anglaise de L. C. Young, avec deux Notes du Prof. Stefan Banach (Monografie matematyczne, Tome VII). — Un volume gr. in-8° de VIII-348 pages. Prix: 5 dollars U.S.A. Warszawa-Lwów. G.-E. Stechert & Co, New-York, 1937.

Voici quatre ans que les *Monografie matematyczne* ont commencé à paraître et que non sans un grand empressement, nous avons signalé cette apparition dans *L'Enseignement mathématique* (**32**, 1933, p. 269). Le succès probable est devenu tout ce qu'il y a de plus certain. La *Théorie de l'Intégrale*, de M. Saks, atteint sa seconde édition avec une rapidité presque incroyable par le temps qui court. Les éloges seraient superflus. Par exemple, ce qui frappe c'est que la première édition était en français et que celle-ci est en anglais. Quelle mystérieuse attraction y a-t-il entre les Britanniques ou Etats-Unis et la Théorie des intégrales généralisées? Inutile d'approfondir. Nous nous étonnerons encore un petit peu plus, tout à l'heure, avec l'ouvrage de M. Kestelman.

Pour celui de M. Saks, nous pourrions renvoyer à l'analyse déjà publiée (*loc. cit.* p. 270) et indiquer les adjonctions. C'est assez délicat, les nou-

veautés étant fort bien incorporées au texte primitif. L'auteur lui-même signale surtout qu'il a corrigé quelques erreurs de la première édition, qu'il doit y en avoir d'autres dans la seconde et même qu'il y en aurait davantage sans les secours bienveillants de MM. J. Todd, A.-J. Ward et A. Zygmund. Bravo. Il faut avoir du génie pour pouvoir parler franchement un tel langage. Le sujet ne se soutient pas toujours par des considérations intuitives et l'on sait que si, par hasard, on s'abandonne à l'intuition c'est pour risquer, de ce fait, des erreurs caractéristiques. On dit souvent que, pour bien comprendre les théories physiques nouvelles il faut faire abstraction des habitudes expérimentales de jadis. De même, pour bien comprendre les nouvelles généralités intégrales, même lorsqu'on parle encore un langage à forme géométrique, il y a avantage à oublier des intuitions puériles pour s'en rapporter strictement au contenu des définitions.

L'intégrale est définie sur des ensembles qui peuvent être éloignés des considérations spatiales vulgaires et qui sont, en tout cas, de structure incomparablement plus précise. L'idée de mesure précède-t-elle le concept d'intégration ? Sans doute, au point de vue historique. Mais, au point de vue logique, la discrimination est souvent malaisée. C'est pourquoi, après les développements à la Borel et à la Lebesgue, nous trouvons la mesure de Carathéodory véritablement construite de toutes pièces non pas *dans* mais *avec* les espaces métriques. Et comme ce qui est métrique peut être physique, on voit quels immenses avantages il y a à espérer de telles constructions mathématiques. La mesurabilité a aussi de certains caractères d'invariance qui la maintiennent dans les domaines utiles.

L'intégrale à la Lebesgue est aussi à rapprocher intimement de celle qui fut conçue antérieurement par Stieltjes. Successeur de Stieltjes à Toulouse, parlant dans la chaire où il parlait jadis je n'écris jamais ce nom sans une profonde vénération. C'est là qu'on trouve la notion de fonctions d'*un intervalle*, créées selon la nature de l'intervalle. Et aussi la notion de *graphes fonctionnels* (p. 88).

Une curieuse nouveauté de la présente édition me paraît constituée par l'espace tore ou torique (torus space). Cet espace, à une infinité de dimensions, est distancié; il commence par être cylindrique d'ordre  $m$  lorsqu'on peut n'y considérer que les  $m$  premières coordonnées de tout point. Il y a là une analogie avec les considérations euclidiennes qui se poursuit simplement jusque dans les considérations intégrales.

L'aire d'une surface  $z = F(x, y)$  nous ramène à des subtilités particulièrement aisées à considérer dans le cas de deux variables.

Les fonctions majeures et mineures sont associées à l'intégrale de Lebesgue suivant les conceptions de M. Ch. J. de la Vallée Poussin. Elles donnent des applications aux fonctions de variables complexes avec Morera, Goursat, Montel, Looman, Menchoff. La possibilité d'associations majeures et mineures conduit à l'intégrabilité selon Perron avec liaisons possibles concernant encore l'intégrale de Stieltjes.

L'espace (cette fois au sens très vulgaire du mot) nous manque pour décrire davantage. Insistons cependant sur le point de vue géométrique qui n'est déconsidéré nulle part à condition qu'il ait une généralité convenable. Il emprunte alors beaucoup à l'Ecole française, aux espaces abstraits de M. Maurice Fréchet et aux notions de Géométrie infinitésimale directe de M. Georges Bouligand. Après ces considérations, après l'intégrale de M. Arnaud Denjoy, on se demande si la notion d'intégrale n'est pas indé-

finiment généralisable et même on le croit. Quels nouveaux mondes intéressants se révéleront dans un proche avenir ? Je n'ose risquer un pronostic. Mais je conseille l'étude du beau livre de M. Saks à qui veut être prophète.

A. BUHL (Toulouse).

H. KESTELMAN. — **Modern Theories of Integration.** — Un volume gr. in-8° relié de VIII-252 pages. Prix: 17s. 6d. net. At the Clarendon Press. Oxford, 1937.

Décidément les Théories modernes, concernant l'intégration, triomphent avec l'appui de la langue anglaise. Le précédent volume, en texte anglais, est cependant d'origine polonaise et imprimé en Pologne. Celui-ci est absolument anglais et vient même de l'Université de Londres. Y a-t-il eu quelque collaboration, au moins télépathique, entre les deux auteurs ? Les gloires françaises des Lebesgue et des Denjoy suscitent-elles des accumulations d'émulations ? Ce serait bien naturel. Mais pourquoi, plus particulièrement, sous forme anglaise ? Enfin mettons qu'il n'y ait là qu'une coïncidence fortuite et voyons ce nouvel et toujours très bel ouvrage. Il semble que, pour le sujet, on ne recule devant aucune dépense.

L'auteur, dans sa Préface, explique fort bien ce qu'il a voulu faire. Les ouvrages anglais ne méconnaissent pas M. Henri Lebesgue mais ne mettent point suffisamment en rapport son œuvre avec celle, plus simple, de M. C. Carathéodory. En suivant cet auteur, on peut arriver à identifier complètement *mesure et intégration*. L'avantage est aussi net dans le cas de  $n$  variables que dans le cas d'une seule. Il faut aussi remonter jusqu'à l'intégrale de Cauchy-Riemann, bien concevoir les cas, déjà très étendus, où elle est suffisante et n'arriver à l'intégrale de Lebesgue qu'au seuil des domaines d'insuffisance ; c'est plus clair. Il y a aussi un aspect géométrique de l'intégrale de Riemann ; on ne le négligera pas, les appels à l'intuition géométrique étant seulement évités avec soin (*carefully*) dans les démonstrations. Pour l'intégrale de Denjoy on évitera le recours au transfini. Pour l'intégrale de Perron, on se reportera à Saks. Enfin les séries de Fourier illustrent les généralités intégrales dans un esprit d'introduction aux *Trigonometrical Series* de A. Zygmund. Les œuvres de G. H. Hardy, C. Carathéodory, S. Saks, S. Banach, W. Sierpinski, les volumes des *Fundamenta Mathematicae* ont été d'inestimables sources de références.

Voilà qui est bel et bon. Toutefois on peut se demander si l'ouvrage ne va pas faire double emploi avec celui de Saks. Mais non. Il est plus élémentaire et serait à étudier d'abord pour qui aurait en main les deux œuvres. De plus, l'auteur, tout en voulant éviter d'avoir recours à l'intuition géométrique, au moins dans les démonstrations, me paraît être un remarquable intuitif. Si c'est malgré lui, le fait n'en est pas moins remarquable et excellent.

Son premier chapitre, sur les ensembles, est une merveille de clarté intuitive. Peut-on, par exemple, établir une égalité, entre deux nombres, sans dénombrement ? Oui. Si je constate que, dans une assemblée, chaque personnage est assis sur une chaise et qu'il n'y a pas de chaise vide, je puis affirmer, sans rien compter, que le nombre des personnages est égal au nombre des chaises. Le mot « noon » comprend quatre membres mais c'est un agrégat de deux lettres seulement ; donc la notion d'agrégat n'a