c'est ainsi que l'auteur a pu s'inspirer de la *Moderne Algebra* (1930-31) de B.-L. van der Waerden. Il y a là, en effet, un ouvrage fondamental auquel on ne saurait trop rendre hommage. Mais, ceci dit, nous remarquerons aussi, avec le plus grand plaisir, qu'un ouvrage anglais sait mieux rendre hommage aux savants français que nombre d'ouvrages allemands.

Ici la liaison est établie avec les travaux d'Edouard Goursat et de M. Elie Cartan. Et cela peut se faire en partant de Pfaff et de Grassmann; les algorithmes de ces derniers dépassaient, de beaucoup, le domaine analytique et visaient un monde formel qui pouvait aussi être physique. L'Ausdehnungslehre, les formes de Pfaff pouvaient constituer un terrain d'accès au Calcul différentiel absolu et à la Gravifique; il en est de même, en principe, vis-à-vis de tout ce qui se peut résoudre en notations relatives à des transformations opératorielles concernant l'étendue, ce dernier mot signifiant, aussi bien, étendue des domaines fonctionnels.

De telles généralités ont parfois le défaut de paraître par trop au-dessus des applications; l'auteur a songé à celles-ci à la fin de son livre, en montrant qu'il pouvait revenir vers les transformations des intégrales multiples c'est-à-dire à la multiplication extérieure, toutes bien suffisantes, pourrions-nous ajouter, pour parvenir aux équations de Maxwell et à la Gravifique. Aussi serait-ce encore un beau sujet d'études que de reprendre les généralités exposées pour les restreindre en vue de questions plus élémentaires déjà développées par des méthodes isolées. Et la brièveté de l'œuvre générale est faite pour tenter les chercheurs. A. Buhl (Toulouse).

Tibor Radó. — **Subharmonic Functions** (Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete herausgegeben von der Schrifleitung des « Zentralblatt für Mathematik ». Fünfter Band). — Un fascicule gr. in-8° de vi-56 pages. Prix: RM. 6.60. Julius Springer, Berlin. 1937.

Encore un sujet que certains pourraient croire nouveau. Il a cependant une intéressante histoire où interviennent les noms de F. Riesz, H. Poincaré, Perron, Remak, Hartogs, Nevanlinna. Pour nous, rappelons qu'il y a trois ans, nous avons analysé ici (**33,** 1934, p. 116) une *Etude des Fonctions sousharmoniques au voisinage d'un point* due à M. Marcel Brelot, auteur d'ailleurs abondamment cité par M. Tibor Radó.

Il est assez malaisé de résumer, en quelques lignes, les idées essentielles de l'exposé, à cause de nombreuses délicatesses inégalitaires qui ne s'abrègent pas. On peut, comme le fait l'auteur au début de sa Préface, partir d'un tracé curviligne convexe qui, par définition, sera toujours sous un tracé rectiligne et sera dit alors *sous-linéaire*. De même que le tracé sous-linéaire est sous le segment *rectiligne* ou *linéaire*, la fonction sousharmonique est sous la fonction harmonique avec possibilité d'en approcher surtout par propriétés intégrales.

Mais, en dehors de propriétés d'approximation déjà très importantes, il y a de nombreuses propriétés exactes qui sont de nature sousharmonique. Ainsi certains potentiels, correspondant à des distributions de masses négatives, sont sousharmoniques. Les surfaces minima et d'autres, à courbure négative, relèvent de la sousharmonicité. Et même, il y a toute une représentation sousharmonique qui généralise la Théorie du potentiel newtonien. Ceci nous rappelle un excellent ouvrage, dû à Oliver Dimon Kellogg, encore analysé dans cette Revue (**28,** 1929, p. 334), ouvrage dont nous avons dit le plus grand bien et qui se trouve avoir préparé les développements sousharmoniques d'aujourd'hui rien qu'en étudiant des potentiels. Les intégrales à utiliser dans tout ceci sont à considérer selon les sens généralisés de Lebesgue et de Stieltjes, si bien que l'exposé implique, à la fois, de puissantes généralisations de notions intégrales et de notions différentielles.

A. Buhl, (Toulouse).

Rudolf Weyrich. — **Die Zylinderfunktionen und ihre Anwendungen.** — Un volume in-8° de VI-138 pages et 8 figures, relié. Prix: RM. 7.60; pour l'étranger RM. 5.70. B. G. Teubner. Leipzig et Berlin, 1937.

Un volume assez peu volumineux mais très dense et pouvant être considéré à deux points de vue. Pour le praticien, ce peut être une initiation très commode à l'emploi des fonctions de Bessel; pour le mathématicien pur ce peut être une de ces monographies fonctionnelles où, à propos de fonctions déterminées, on passe en revue toutes les finesses de la Théorie des fonctions. La fonction gamma, un peu usée maintenant, a joué longtemps un tel rôle; la fonction dzéta de Riemann est, à cet égard, une perfection. Mais vraiment, avec les fonctions de Bessel, telles qu'elles sont maniées par M. Weyrich, on peut s'instruire autant et d'ailleurs prendre contact avec les nouveautés de la Mécanique ondulatoire, lesquelles, en des cas particulièrement simples, ont besoin de fonctions cylindriques.

Le sujet se réclame d'abord des équations d'onde

$$\Delta_3 U = a\frac{\partial^2 U}{\partial t^2} + b\frac{\partial U}{\partial t}, \qquad \Delta_3 U + k^2 U = 0$$

où Δ_3 est le laplacien à trois variables x, y, z. On peut y satisfaire par ondes planes, par ondes sphériques puis précisément par ondes cylindriques à représentations intégrales simples. Remarquons, tout de suite, le nom de Hankel, mathématicien du siècle précédent, déjà bien éloigné de nous mais qui eût le génie des intégrales définies et des lacets; des méthodes modernes peuvent rajeunir son exposition mais sans y rien changer d'essentiel. Puis ce fut Sommerfeld, plus préoccupé du sens physique des choses. Tout ceci pour un sujet qui, du côté des équations différentielles, nous semble avoir son origine dans les travaux de Sturm et Liouville à peine nommés par l'auteur mais non totalement oubliés. Remercions.

Les ondes cylindriques semblent déjà procéder de curieuses manières de progresser; comme elles sont analytiques, il ne faut pas s'étonner si les propriétés de récurrence qui les concernent s'établissent surtout dans le domaine complexe. Les résultats fonctionnels, les relations avec la fonction gamma et la constante d'Euler donnent quelques pages particulièrement remarquables.

Hankel nous a encore donné des représentations asymptotiques poursuivies par Debye; toutefois ce n'est que le cas d'arguments et d'indices réels. Les méthodes approchées, pour la représentation des fonctions cylindriques, ne peuvent évidemment être considérées comme définitives; comment interdire la découverte de quelque approximation meilleure ? En attendant nous allons aux résultats de Nicholson et Watson (1918) par une méthode intégrale due à Airy (1883). L'évolution de la Science a été minutieusement suivie.