

LA SPHÈRE DE LONGCHAMPS

Autor(en): **Thébault, V.**

Objektyp: **Article**

Zeitschrift: **L'Enseignement Mathématique**

Band (Jahr): **36 (1937)**

Heft 1-2: **L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE**

PDF erstellt am: **13.09.2024**

Persistenter Link: <https://doi.org/10.5169/seals-28029>

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern. Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

Haftungsausschluss

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

LA SPHÈRE DE LONGCHAMPS

PAR

V. THÉBAULT, Le Mans (Sarthe).

Dans *L'Enseignement mathématique* (1930, pp. 31-34), M. N. ALTSHILLER-COURT suggère la recherche des propriétés d'une sphère qui étendraient au tétraèdre celles d'un cercle du triangle étudié par G. DE LONGCHAMPS ¹.

Il signale une généralisation de ce cercle et se borne à donner quelques propositions quand le tétraèdre est *orthocentrique*.

Nous avons déjà apporté une contribution à l'étude de cette sphère remarquable lorsqu'il s'agit du tétraèdre général ². Nous voudrions reprendre notre travail pour y ajouter des résultats plus généraux et des compléments.

1. — Soient un tétraèdre *quelconque* ABCD, ($BC = a$, $CA = b$, $AB = c$, $DA = a'$, $DB = b'$, $DC = c'$); G son centre de gravité, G_a , G_b , G_c , G_d ceux des faces BCD, CDA, DAB, ABC; (O) la sphère circonscrite, de rayon R; Ω le centre de l'hyperboloïde des hauteurs (point de MONGE), symétrique du centre O par rapport au point G.

Considérons une sphère (ω), de rayon ρ , pour laquelle les puissances des sommets A, B, C, D du tétraèdre aient les formes kl^2 , km^2 , kn^2 , kp^2 , l^2 , m^2 , n^2 , p^2 ayant des valeurs données et k étant un coefficient arbitraire.

Soient (π) le plan radical de la sphère (O) circonscrite au tétraèdre et de la sphère (ω); α , β , γ , δ les projections orthogonales

¹ *Journal de Mathématiques spéciales*, 1886, pp. 57, ...

² *Mathesis*, 1932, pp. 223-228.

des sommets A, B, C, D du tétraèdre sur le plan (π); M, N, P, Q, S, T les intersections du même plan et des arêtes BD, DC, CB, BA, AC, AD. On a, en grandeur et en signe,

$$\begin{aligned} A\bar{\omega}^2 - \rho^2 &= kl^2 = 2O\omega \cdot A\alpha \\ B\bar{\omega}^2 - \rho^2 &= km^2 = 2O\omega \cdot B\beta \\ C\bar{\omega}^2 - \rho^2 &= kn^2 = 2O\omega \cdot C\gamma \\ D\bar{\omega}^2 - \rho^2 &= kp^2 = 2O\omega \cdot D\delta . \end{aligned} \quad (1)$$

Le plan (B β ,D δ) coupe le plan (π) suivant une droite qui passe par le point M, et

$$MB : MD = B\beta : D\delta = m^2 : p^2 .$$

Le point M et, par analogie, les points N, P, Q, S, T et le plan (π) qui les contient, restent donc fixes lorsque k varie. Par suite:

Le lieu du centre ω de la sphère (ω), lorsque k varie, est la droite Δ menée du centre de la sphère circonscrite perpendiculairement au plan (π) de coordonnées barycentriques l^2, m^2, n^2, p^2 , par rapport au tétraèdre ¹.

Ayant

$$A\bar{\omega}^2 - kl^2 = B\bar{\omega}^2 - km^2 = C\bar{\omega}^2 - kn^2 = D\bar{\omega}^2 - kp^2 = \rho^2 , \quad (2)$$

le centre de la sphère (ω) est le centre radical des sphères

$$\begin{aligned} (A, \sqrt{k(l^2 + \lambda)}) , & \quad (B, \sqrt{k(m^2 + \lambda)}) , & \quad (C, \sqrt{k(n^2 + \lambda)}) , \\ & \quad (D, \sqrt{k(p^2 + \lambda)}) , & \end{aligned} \quad (3)$$

quel que soit λ , et la sphère (ω) est la sphère orthogonale des sphères

$$(A, l\sqrt{k}) , \quad (B, m\sqrt{k}) , \quad (C, n\sqrt{k}) , \quad (D, p\sqrt{k}) . \quad (4)$$

A deux valeurs k_1, k_2 du paramètre k , correspondent deux sphères (ω_1), (ω_2). Le plan (π) et les distances algébriques

¹ V. THÉBAULT, *Mathesis*, 1932 (supplément).

$A\alpha, B\beta, C\gamma, D\delta$ restant les mêmes, lorsque k varie, on a cette relation entre les distances des centres des sphères $(O), (\omega_1), (\omega_2)$,

$$O\omega_1 : O\omega_2 = k_1 : k_2 . \quad (5)$$

Plus généralement, à n valeurs $k_1, k_2, k_3, \dots, k_n$ du paramètre k , correspondent les sphères $(\omega_1), (\omega_2), (\omega_3), \dots, (\omega_n)$ pour lesquelles on a la relation

$$\frac{O\omega_1}{k_1} = \frac{O\omega_2}{k_2} = \frac{O\omega_3}{k_3} = \dots = \frac{O\omega_n}{k_n} . \quad (6)$$

Si trois coefficients k_1, k_2, k_3 vérifient les égalités

$$k_1 = \frac{1}{2}(k_2 + k_3)$$

ou

$$\frac{2}{k_1} = \frac{1}{k_2} + \frac{1}{k_3} ,$$

dans la première hypothèse, les centres ω_2 et ω_3 des sphères correspondantes sont symétriques par rapport au centre de la sphère (ω_1) . Dans le second cas, la division $(O, \omega_1, \omega_2, \omega_3)$ est harmonique.

2. — Si nous supposons d'abord que

$$\begin{aligned} l^2 = a^2 + b'^2 + c'^2 , \quad m^2 = a'^2 + b^2 + c'^2 , \quad n^2 = a'^2 + b'^2 + c^2 , \\ p^2 = a^2 + b^2 + c^2 , \end{aligned} \quad (7)$$

les relations (1) deviennent

$$\begin{aligned} A\bar{\omega}^2 - \rho^2 &= k(a^2 + b'^2 + c'^2) = 2O\omega \cdot A\alpha \\ B\bar{\omega}^2 - \rho^2 &= k(a'^2 + b^2 + c'^2) = 2O\omega \cdot B\beta \\ C\bar{\omega}^2 - \rho^2 &= k(a'^2 + b'^2 + c^2) = 2O\omega \cdot C\gamma \\ D\bar{\omega}^2 - \rho^2 &= k(a^2 + b^2 + c^2) = 2O\omega \cdot D\delta . \end{aligned} \quad (8)$$

Le plan $(B\beta, D\delta)$, par exemple, coupe le plan (π) suivant une droite qui passe en M , et

$$\frac{\overline{MB}}{\overline{MD}} = \frac{\overline{B\beta}}{\overline{D\delta}} = \frac{a'^2 + b^2 + c'^2}{a^2 + b^2 + c^2} . \quad (9)$$

De plus, on a

$$A\bar{\omega}^2 - B\bar{\omega}^2 = k[(a^2 - a'^2) - (b^2 - b'^2)], \dots, \quad (10)$$

puis, en vertu de formules connues,

$$\overline{AG}^2 - \overline{BG}^2 = -\frac{1}{4}[(a^2 - a'^2) - (b^2 - b'^2)], \dots, \quad (11)$$

si bien que les expressions

$$A\bar{\omega}^2 - B\bar{\omega}^2, \quad B\bar{\omega}^2 - C\bar{\omega}^2, \quad C\bar{\omega}^2 - D\bar{\omega}^2, \quad D\bar{\omega}^2 - A\bar{\omega}^2,$$

et

$$\overline{AG}^2 - \overline{BG}^2, \quad \overline{BG}^2 - \overline{CG}^2, \quad \overline{CG}^2 - \overline{DG}^2, \quad \overline{DG}^2 - \overline{AG}^2,$$

sont de mêmes formes. D'où ce théorème: *le lieu du centre ω de la sphère, lorsque k varie, est la droite qui joint le centre O de la sphère circonscrite au centre G de gravité du tétraèdre ABCD*

En outre, en vertu de (5),

$$O\bar{\omega} : \overline{OG} = k : -\frac{1}{4}; \quad \text{et} \quad O\bar{\omega} = -4k \cdot \overline{OG}; \quad (12)$$

puis, et par analogie,

$$\begin{aligned} A\bar{\alpha} &= \frac{k(a^2 + b'^2 + c'^2)}{8k \cdot \overline{OG}} = -\frac{a^2 + b'^2 + c'^2}{8\overline{OG}}, \\ B\bar{\beta} &= -\frac{a'^2 + b^2 + c'^2}{8\overline{OG}}, \quad C\bar{\gamma} = -\frac{a'^2 + b'^2 + c^2}{8\overline{OG}}, \\ D\bar{\delta} &= -\frac{a^2 + b^2 + c^2}{8\overline{OG}}. \end{aligned} \quad (13)$$

Enfin, k étant l'intersection de la droite OG avec le plan (π) ,

$$\begin{aligned} G\bar{K} &= \frac{1}{4}(A\bar{\alpha} + B\bar{\beta} + C\bar{\gamma} + D\bar{\delta}) = -\frac{a^2 + a'^2 + b^2 + b'^2 + c^2 + c'^2}{16\overline{OG}} \\ &= -\frac{\Sigma a^2}{16\overline{OG}}. \end{aligned} \quad (14)$$

Il est facile de déterminer l'expression du rayon ρ de la sphère (ω) dans l'hypothèse où l^2, m^2, n^2, p^2 satisfont aux

relations (7). Le centre ω est situé sur la droite OG. En appliquant le théorème de STEWART au triangle AOG, par exemple, le sens positif sur la droite indéfinie passant par les points O et G étant celui de O vers G, on a

$$G\bar{\omega} \cdot A\bar{O}^2 + O\bar{\omega} \cdot A\bar{G}^2 = O\bar{G} \cdot A\bar{\omega}^2 + O\bar{\omega} \cdot \omega\bar{G} \cdot O\bar{G}^2 ;$$

d'où, en vertu de (12),

$$A\bar{\omega}^2 = (1 + 4k) \cdot R^2 - 4k \cdot A\bar{G}^2 + 4k(1 + 4k) \cdot O\bar{G}^2 . \quad (15)$$

Or, on sait que

$$A\bar{G}^2 = \frac{9}{16} A\bar{G}_a^2 = \frac{1}{16} [3(a'^2 + b^2 + c^2) - (a^2 + b'^2 + c'^2)] \quad (16)$$

$$O\bar{G}^2 = R^2 - \frac{1}{16}(a^2 + a'^2 + b^2 + b'^2 + c^2 + c'^2) . \quad (17)$$

Dès lors, après réductions, et par analogie,

$$\begin{aligned} A\bar{\omega}^2 &= (1 + 4k)^2 \cdot R^2 - k(a'^2 + b^2 + c^2) - k^2 \cdot \Sigma a^2 \\ B\bar{\omega}^2 &= (1 + 4k)^2 \cdot R^2 - k(a^2 + b'^2 + c^2) - k^2 \cdot \Sigma a^2 \\ C\bar{\omega}^2 &= (1 + 4k)^2 \cdot R^2 - k(a^2 + b^2 + c'^2) - k^2 \cdot \Sigma a^2 \\ D\bar{\omega}^2 &= (1 + 4k)^2 \cdot R^2 - k(a'^2 + b'^2 + c'^2) - k^2 \cdot \Sigma a^2 . \end{aligned} \quad (18)$$

Eu égard à (8), on déduit de ces égalités, que

$$\rho^2 = A\bar{\omega}^2 - k(a^2 + b'^2 + c'^2) = (1 + 4k)^2 \cdot R^2 - k(k + 1) \cdot \Sigma a^2 . \quad (19)$$

En outre, les relations (18) fournissent la suivante:

$$A\bar{\omega}^2 + B\bar{\omega}^2 + C\bar{\omega}^2 + D\bar{\omega}^2 = [2(1 + 4k)]^2 \cdot R^2 - 2k(2k + 1) \cdot \Sigma a^2 , \quad (20)$$

laquelle découle également de la formule connue

$$A\bar{\omega}^2 + B\bar{\omega}^2 + C\bar{\omega}^2 + D\bar{\omega}^2 = A\bar{G}^2 + B\bar{G}^2 + C\bar{G}^2 + D\bar{G}^2 + 4\omega\bar{G}^2 .$$

Remarques. 1^o La puissance du centre G de gravité du tétraèdre ABCD, par rapport à la sphère (ω), a pour expression, en vertu de (19),

$$G\bar{\omega}^2 - \rho^2 = [(1 + 4k) \cdot OG]^2 - \rho^2 = \frac{8k - 1}{16} \cdot \Sigma a^2 . \quad (21)$$

2° Lorsque $k = -\frac{1}{2}$, $O\omega = 2OG = O\Omega$. Dans cette hypothèse, la relation (20), qui devient

$$A\bar{\Omega}^2 + B\bar{\Omega}^2 + C\bar{\Omega}^2 + D\bar{\Omega}^2 = 4R^2, \quad (22)$$

permet d'énoncer ce théorème:

*La somme des carrés des distances du point de MONGE aux sommets d'un tétraèdre est égale au carré du diamètre de la sphère circonscrite*¹.

3° Lorsque le tétraèdre ABCD est *équi-fascial*,

$$\Sigma a^2 = 16R^2, \quad O\bar{\omega} = -4k \cdot O\bar{G} = 0, \quad O \equiv \omega.$$

Dans ce tétraèdre spécial, les sphères orthogonales aux quatre sphères (4), de centres A, B, C, D, ont pour centre O.

3. — Le cercle DE LONGCHAMPS est celui qui coupe orthogonalement les trois cercles (A, a), (B, b), (C, c), ayant pour centres les sommets A, B, C d'un triangle et comme rayons les côtés opposés respectifs $BC = a$, $CA = b$, $AB = c$. Autrement dit, les puissances des sommets A, B, C, par rapport au cercle (ω), sont respectivement égales aux carrés a^2 , b^2 , c^2 des côtés opposés.

Nous proposons d'appeler *Sphère DE LONGCHAMPS* d'un tétraèdre *quelconque*, une sphère (ω) telle que les puissances des sommets A, B, C, D, par rapport à cette sphère, soient respectivement

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}(a^2 + b'^2 + c'^2), \quad \frac{1}{2}(a'^2 + b^2 + c'^2), \quad \frac{1}{2}(a'^2 + b'^2 + c^2), \\ \frac{1}{2}(a^2 + b^2 + c^2). \end{aligned} \quad (23)$$

De cette façon, la somme des puissances pour les quatre sommets du tétraèdre, égale

$$a^2 + a'^2 + b^2 + b'^2 + c^2 + c'^2 = \Sigma a^2,$$

¹ V. THÉBAULT, *Gazeta Matematica*, Bucarest, 1933, p. 86.

c'est-à-dire la somme des carrés des six arêtes, de même que la somme des puissances des sommets d'un triangle ABC, par rapport à son cercle DE LONGCHAMPS, égale la somme des carrés des côtés de ce triangle.

Nous allons montrer que cette sphère (ω) présente bien des analogies avec le cercle en question.

4. — SPHÈRE DE LONGCHAMPS. Cette sphère (ω), de rayon ρ , est déterminée par les relations (8) dans lesquelles $k = \frac{1}{2}$.

Des égalités (5), (10) et (11), on déduit

$$O\bar{\omega} : \overline{OG} = \frac{1}{2} : -\frac{1}{4} = -2. \quad (24)$$

Le centre ω de la sphère DE LONGCHAMPS est le symétrique du point Ω de MONGE par rapport au centre de la sphère circonscrite au tétraèdre ABCD, autrement dit, le point ω coïncide avec le point de MONGE du tétraèdre anticomplémentaire $A_1 B_1 C_1 D_1$ obtenu en menant par A, B, C, D les plans parallèles aux faces opposées du tétraèdre fondamental.

Si le tétraèdre ABCD est orthocentrique, le point ω est le symétrique de l'orthocentre H du tétraèdre, par rapport au centre de la sphère circonscrite, c'est-à-dire l'orthocentre du tétraèdre anticomplémentaire $A_1 B_1 C_1 D_1$ ¹.

L'expression

$$\rho^2 = 9R^2 - \frac{3}{4}(a^2 + a'^2 + b^2 + b'^2 + c^2 + c'^2) \quad (25)$$

du carré du rayon de la sphère (ω), découle immédiatement de la formule (19).

La sphère (ω) est réelle, se réduit à son centre, ou bien est imaginaire, suivant que

$$3R^2 > \frac{1}{4} \Sigma a^2, \quad 3R^2 = \frac{1}{4} \Sigma a^2, \quad 3R^2 < \frac{1}{4} \Sigma a^2. \quad (26)$$

¹ N. A. COURT, *loc. cit.*

Lorsque la sphère (ω) est réelle, le centre G de gravité du tétraèdre est *extérieur* à cette sphère, car

$$\omega \overline{G}^2 = 9 \overline{OG}^2 = 9R^2 - \frac{9}{16} \Sigma a^2 > 9R^2 - \frac{3}{4} \Sigma a^2 = \rho^2 .$$

Quand la sphère (ω) se réduit à son centre ω ,

$$\Sigma a^2 = 12R^2 , \quad OG = \frac{R}{2} ; \quad (27)$$

le centre Ω de l'hyperboloïde des hauteurs est sur la sphère circonscrite et le tétraèdre ABCD est trirectangle.

Dans un tétraèdre *orthocentrique* ABCD, d'orthocentre H, le carré du rayon de la sphère conjuguée s'exprime

$$\rho'^2 = R^2 - \frac{1}{4} (a^2 + a'^2) = R^2 - \frac{1}{12} \Sigma a^2 = \frac{1}{9} \rho^2 . \quad (28)$$

Dans ce cas particulier, on a donc $\rho' = 3\rho$, et,

La sphère DE LONGCHAMPS d'un tétraèdre orthocentrique se confond avec la sphère conjuguée au tétraèdre anticomplémentaire $A_1B_1C_1D_1$ du tétraèdre ABCD ¹.

A. THÉORÈME. *Le plan (π) est le plan polaire du centre G de gravité du tétraèdre ABCD, par rapport à la sphère DE LONGCHAMPS.*

En effet, en vertu de (21), la puissance du point G pour la sphère (ω), est égale, en grandeur et en signe, à

$$\begin{aligned} G \overline{\omega}^2 - \rho^2 &= \frac{1}{16} \left(8 \cdot \frac{1}{2} - 1 \right) \cdot \Sigma a^2 = \frac{3}{16} \Sigma a^2 = \\ &= \frac{\Sigma a^2}{16 \overline{OG}} \cdot \left(1 + 4 \cdot \frac{1}{2} \right) \cdot \overline{OG} = \overline{GK} \cdot \overline{G\omega} , \quad (29) \end{aligned}$$

ce qui justifie le théorème.

Remarques: 1° Lorsque $k = -\frac{1}{4}$, le centre ω de la sphère, envisagée au paragraphe 2, coïncide avec le centre G de gravité

¹ N. A. COURT, *loc. cit.*

du tétraèdre. Le carré du rayon de cette sphère (G) a pour expression

$$\rho_1^2 = \frac{3}{16} \Sigma a^2, \quad (30)$$

et on a

$$\begin{aligned} \rho^2 + \rho_1^2 &= 9R^2 - \frac{3}{4} \Sigma a^2 + \frac{3}{16} \Sigma a^2 = 9 \left(R^2 - \frac{1}{16} \Sigma a^2 \right) = \\ &= 9 OG^2 = G\bar{\omega}^2; \quad (31) \end{aligned}$$

d'où ce théorème:

La sphère (G, ρ_1) est orthogonale à la sphère (ω) DE LONGCHAMPS et le plan (π) est le plan polaire du centre ω de cette dernière sphère, par rapport à la sphère (G).

2° Soient $\alpha\alpha'$, $\beta\beta'$, $\gamma\gamma'$ les distances des milieux des arêtes BC et DA, CA et DB et DC du tétraèdre. On sait que

$$\alpha\bar{\alpha}'^2 + \beta\bar{\beta}'^2 + \gamma\bar{\gamma}'^2 = \frac{1}{4} \Sigma a^2.$$

Mais les droites $\alpha\alpha'$, $\beta\beta'$, $\gamma\gamma'$ se coupent en leurs milieux au centre G de gravité du tétraèdre, et

$$\frac{1}{4} (\alpha\bar{\alpha}'^2 + \beta\bar{\beta}'^2 + \gamma\bar{\gamma}'^2) = \frac{1}{16} \Sigma a^2 = \frac{1}{3} \rho_1^2. \quad (32)$$

Si le tétraèdre ABCD est orthocentrique, $\alpha\alpha' = \beta\beta' = \gamma\gamma'$,

$$G\bar{\alpha}^2 = G\bar{\beta}^2 = G\bar{\gamma}^2 = \frac{1}{48} \Sigma a^2 = \frac{1}{9} \rho_1^2, \quad (33)$$

et la sphère (G, ρ_1) se confond avec la première sphère des douze points du tétraèdre anticomplémentaire $A_1 B_1 C_1 D_1$ du tétraèdre orthocentrique ABCD.

B. THÉORÈME. *Les sphères décrites des symétriques A_2, B_2, C_2, D_2 des sommets A, B, C, D d'un tétraèdre, par rapport à son centre G de gravité, comme centres, avec $A_2 A, B_2 B, C_2 C, D_2 D$ pour rayons respectifs, sont orthogonales à la sphère DE LONGCHAMPS du tétraèdre ABCD.*

Le tétraèdre $A_2 B_2 C_2 D_2$ est symétrique du tétraèdre ABCD, par rapport au point G. Or, on a

$$4(A\bar{G}^2 - B\bar{G}^2) = - [(a^2 - a'^2) - (b^2 - b'^2)] , \dots$$

La sphère (Φ), de rayon ρ'' , orthogonale aux sphères de centres A, B, C, D et de rayons respectifs $2AG = AA_2$, $2BG = BB_2$, $2CG = CC_2$, $2DG = DD_2$, a donc son centre Φ sur la droite OG;

$$k = -1 , \quad \frac{O\bar{\Phi}}{O\bar{G}} = -1 : -\frac{1}{4} = 4 ;$$

$$\rho''^2 = 9R^2 - \frac{3}{4} \Sigma a^2 = \rho^2 ; \quad (34)$$

autrement dit, le point Φ , symétrique du centre O de la sphère circonscrite, par rapport au point Ω , coïncide avec le centre O_1 de la sphère circonscrite au tétraèdre $A_1 B_1 C_1 D_1$ anticomplémentaire de ABCD. La sphère Φ est égale à la sphère (ω) DE LONGCHAMPS du tétraèdre ABCD.

Le centre ω_2 de la sphère (ω_2), orthogonale aux sphères de centres A_2, B_2, C_2, D_2 et de rayons respectifs $A_2 A, B_2 B, C_2 C, D_2 D$, est symétrique de celui de la sphère (Φ), par rapport au point G, si bien que

$$G\omega_2 = -G\Phi = -3OG = G\omega .$$

En outre, les sphères (Φ), (ω_2) sont symétriquement égales; la sphère (ω_2) se confond avec la sphère (ω) DE LONGCHAMPS du tétraèdre ABCD, ce qui démontre le théorème.

C. THÉORÈME. *La sphère (ω) DE LONGCHAMPS, la sphère (O) circonscrite au tétraèdre fondamental, la sphère (O_1) circonscrite au tétraèdre anticomplémentaire $A_1 B_1 C_1 D_1$ et la sphère (G, ρ_1), ont le même plan radical (π).*

Pour démontrer cette proposition, il suffit de voir que le plan (π) est le plan radical des sphères ($O_1, 3R$) et (G, ρ_1). Si

l'on désigne par d la distance algébrique du point G au plan radical de ces sphères, on a

$$-\rho_1^2 - (G\bar{O}_1^2 - 9R^2) = 2\bar{O}_1G \cdot d ;$$

d'où

$$-\frac{3}{16}\Sigma a^2 + \frac{9}{16}\Sigma a^2 = -6\bar{O}G \cdot d ;$$

puis, en vertu de (14),

$$d = -\frac{\Sigma a^2}{16\bar{O}G} = G\bar{K} , \tag{35}$$

ce qui justifie le théorème.

On en déduit aussi que le cercle d'intersection du plan (π) avec la sphère (O) , lorsqu'il existe, est commun à la sphère (O) et à une sphère, de rayon $3R$, dont le centre est le symétrique du point O , par rapport au point de MONGE du tétraèdre.

D. THÉORÈME. Le plan complémentaire (π') du plan (π) ¹, par rapport au tétraèdre $ABCD$, est le plan radical commun à la sphère (O) circonscrite, à la sphère circonscrite au tétraèdre complémentaire $G_a G_b G_c G_d$ du tétraèdre $ABCD$, à la sphère $(G, \frac{1}{3}\rho_1)$, et à la sphère DE LONGCHAMPS du tétraèdre $G_a G_b G_c G_d$.

Il suffit, en effet, de transformer la figure formée par les sphères $(O_1, 3G)$, (O, R) , (G, ρ_1) , (ω, ρ) , par l'homothétie $(G, -\frac{1}{3})$. Ces sphères deviennent respectivement les sphères (O, R) , $(G_a G_b G_c G_d)$, $(G, \frac{1}{3}\rho_1)$, $(\Omega, \frac{1}{3}\rho)$.

Remarques. En réunissant des propriétés des sphères (G, ρ_1) et (ω, ρ) , obtenues précédemment lorsque le tétraèdre $ABCD$ est orthocentrique, on retrouve ce théorème connu:

Dans un tétraèdre orthocentrique, la sphère circonscrite, la sphère conjuguée, la première et la seconde sphères des douze points, ont même plan radical. Ce plan est le plan polaire du centre de gravité du tétraèdre, par rapport à la sphère conjuguée².

¹ Le plan (π') est le transformé du plan (π) par l'homothétie $(G, -\frac{1}{3})$.

² Cfr., par exemple, G. DE LONGCHAMPS, *Mathesis*, 1890, p. 82.

On peut ajouter que *le plan radical de ces quatre sphères est aussi le plan polaire de l'orthocentre du tétraèdre par rapport à la première sphère des douze points.*

E. En vertu des égalités (9) et de leurs analogues pour les autres arêtes du tétraèdre ABCD, les points M, N, P, Q, S, T sont les centres des sphères ayant pour diamètres les distances de deux centres de similitude des sphères (A), (B), (C), (D), orthogonales à la sphère (ω) DE LONGCHAMPS, prises deux à deux.

Les sphères (B), (D), (M) ont même plan radical.

Il en est de même des triples de sphères (D), (C), (N); (C), (B), (P); (B), (A), (Q); (A), (C), (S); (A), (D), (T).

La sphère (ω) DE LONGCHAMPS, orthogonale aux sphères (A), (B), (C), (D), l'est aussi aux sphères (M), (N), (P), (Q), (S), (T). De plus, puisque les points M, N, P, Q, S, T sont dans le plan (π), les sphères de similitude (M), (N), (P), (Q), (S), (T) sont aussi orthogonales à la sphère (O) circonscrite au tétraèdre, et, par suite, à la sphère ($O_1, 3R$) circonscrite au tétraèdre anticomplémentaire $A_1B_1C_1D_1$ de ABCD.

Ces six sphères de similitude se coupent donc en deux points V et W, symétriques par rapport au plan (π), situés sur la droite OG qui joint le centre de la sphère circonscrite au centre de gravité du tétraèdre, et

$$O\bar{V} \cdot O\bar{W} = R^2, \quad \omega\bar{V} \cdot \omega\bar{W} = \rho^2. \quad (36)$$

Observant que $O_1A_1 = 3R$, on obtient cette proposition qui étend au tétraèdre un théorème de E. LEMOINE relatif aux cercles d'APOLLONIUS du triangle ¹:

Dans un tétraèdre ABCD, le centre de la sphère circonscrite au tétraèdre anticomplémentaire $A_1B_1C_1D_1$, a la même puissance égale à $9R^2$, par rapport aux six sphères lieux des points dont les rapports des distances à deux des sommets du tétraèdre sont égaux aux rapports des sommes des carrés des arêtes des faces opposées aux sommets considérés.

F. THÉORÈME. Soient $A_1B_1C_1D_1$ le tétraèdre anticomplémentaire d'un tétraèdre orthocentrique ABCD et un point M du

¹ Journal de Mathématiques élémentaires de G. DE LONGCHAMPS, 1886, p. 142.

plan du triangle ABC, M_1 l'antico-plémentaire de ce point par rapport au même triangle. La sphère DE LONGCHAMPS du tétraèdre ABCD est orthogonale à la sphère décrite du point N, situé au quart du segment rectiligne M_1D_1 à partir du point M_1 , comme centre, avec $\frac{3}{2}DM$ pour rayon.

LEMME. Dans un tétraèdre orthocentrique, la puissance du milieu d'une hauteur, par rapport à la sphère conjuguée, est égale au quart du carré de cette hauteur.¹

Soit X le milieu de la hauteur $D_1D'_1$ d'un tétraèdre orthocentrique $A_1B_1C_1D_1$, d'orthocentre H_1 . On a, en effet, en grandeur et en signe, r étant le rayon de la sphère conjuguée,

$$r^2 = H_1\bar{D}'_1 \cdot H_1\bar{D}_1 = H_1\bar{D}'_1 \cdot (H_1\bar{D}'_1 + D'_1\bar{D}_1) = H_1\bar{D}'_1 \cdot (H_1\bar{D}_1 - D_1\bar{D}'_1). \quad (37)$$

D'autre part, la puissance du point X, par rapport à la sphère conjuguée, est

$$\begin{aligned} X\bar{H}_1^2 - r^2 &= (X\bar{D}'_1 + D'_1\bar{H}_1)^2 - H_1\bar{D}'_1 \cdot (H_1\bar{D}'_1 - D_1\bar{D}'_1) = \\ &= \left(\frac{1}{2}D_1\bar{D}'_1 - H_1\bar{D}'_1\right)^2 - H_1\bar{D}'_1^2 + H_1\bar{D}'_1 \cdot D_1\bar{D}'_1 = \frac{1}{4}D_1\bar{D}'_1^2. \end{aligned} \quad (38)$$

Dans la configuration relative au théorème précédent, P_1 étant le point où la droite D_1M_1 , perce le plan de la face $A_1B_1C_1$ du tétraèdre $A_1B_1C_1D_1$, on a évidemment $DM = \frac{2}{3}ND_1$, et le point N est le milieu du segment rectiligne D_1P_1 .

Dès lors, on a

$$N\bar{D}_1^2 = D_1\bar{X}^2 + N\bar{X}^2 = \frac{1}{4}D_1\bar{D}'_1^2 + N\bar{H}^2 - X\bar{H}^2,$$

puis, en vertu du LEMME ci-dessus,

$$N\bar{H}^2 = N\bar{D}_1^2 - \frac{1}{4}D_1\bar{D}'_1^2 + X\bar{H}^2 = N\bar{D}_1^2 - r^2 = \left(\frac{3}{2}DM\right)^2 - r^2,$$

ce qui justifie notre théorème.

Remarque. Dans l'hypothèse où la sphère DE LONGCHAMPS du tétraèdre ABCD est réelle, on parvient au même résultat en

¹ Cette propriété nous a été communiquée par M. R. GOORMAGHTIGH.

observant que la droite D_1P_1 perce cette sphère en deux points J et L qui divisent harmoniquement le segment rectiligne D_1P_1 ; on a donc

$$N\bar{J} \cdot N\bar{L} = N\bar{D}_1^2 = \left(\frac{3}{2}D\bar{M}\right)^2.$$

5. — Soient une sphère quelconque, de centre P, et les sphères (A, l), (B, m), (C, n), (D, p), ayant pour centres les sommets d'un tétraèdre ABCD, qui coupent orthogonalement la sphère (P). Si les points A', B', C', D' partagent respectivement les segments rectilignes AP, BP, CP, DP dans un même rapport tel que

$$\begin{aligned} A'\bar{A} &= u \cdot A\bar{P}, & B'\bar{B} &= u \cdot B\bar{P}, & C'\bar{C} &= u \cdot C\bar{P}, \\ D'\bar{D} &= u \cdot D\bar{P}, \end{aligned}$$

et que les points de divisions soient les centres des sphères dont les rayons respectifs $\varrho \cdot \bar{AP}$, $\varrho \cdot \bar{BP}$, $\varrho \cdot \bar{CP}$, $\varrho \cdot \bar{DP}$ sont proportionnels aux longueurs AP, BP, CP, DP, *le centre P' de la sphère orthogonale à ces quatre sphères est situé sur la droite joignant le point P au centre O de la sphère circonscrite au tétraèdre.*

On a, en effet,

$$A\bar{P}^2 - B\bar{P}^2 = l^2 - m^2, \quad (39)$$

et des relations analogues pour $B\bar{P}^2 - C\bar{P}^2$, $C\bar{P}^2 - D\bar{P}^2$, $D\bar{P}^2 - A\bar{P}^2$, déduites de la première par des permutations circulaires sur l, m, n, p; d'où il résulte que l'on a les relations

$$\begin{aligned} A'\bar{P}'^2 - B'\bar{P}'^2 &= (\varrho \cdot AP)^2 - (\varrho \cdot BP)^2 = \varrho^2 (A\bar{P}^2 - B\bar{P}^2) = \\ &= \varrho^2 \cdot (l^2 - m^2); \dots \quad (40) \end{aligned}$$

Les centres P et P' des sphères orthogonales aux quatre sphères (A, l), (B, m), (C, n), (D, p) et aux quatre sphères (A', $\varrho \cdot \bar{AP}$), (B', $\varrho \cdot \bar{BP}$), (C', $\varrho \cdot \bar{CP}$), (D', $\varrho \cdot \bar{DP}$), sont situés sur les diamètres OP et O'P' des sphères (O) et (O') circonscrites aux tétraèdres ABCD et A'B'C'D', perpendiculaires aux plans (π) et (π') de coordonnées barycentriques l^2, m^2, n^2, p^2 , par rapport aux deux tétraèdres. Ces tétraèdres ABCD et A'B'C'D' étant directement homothétiques, les plans (π) et (π') sont parallèles, et les points O, P, O', P' sont collinéaires.

Le tétraèdre $A'B'C'D'$ étant pris comme tétraèdre de référence, on a, en vertu de (5),

$$A'\overline{P'^2} - B'\overline{P'^2} = \rho^2 \cdot (A\overline{P^2} - B\overline{P^2}) = \rho^2 \cdot (l^2 - m^2) , \dots , \quad (41)$$

puis,

$$A'\overline{P^2} - B'\overline{P^2} = u^2 \cdot (A\overline{P^2} - B\overline{P^2}) = u^2 \cdot (l^2 - m^2) , \dots ; \quad (42)$$

d'où il résulte que

$$\frac{\overline{O'P'}}{\overline{O'P}} = \frac{\rho^2}{u^2} = \frac{\overline{O'P'}}{u \cdot \overline{OP}} , \quad (43)$$

puis, que

$$O'\overline{P'} = \frac{\rho^2}{u} \cdot O\overline{P} . \quad (44)$$

Observant, en outre, que

$$O'\overline{P} = u \cdot O\overline{P} , \quad O\overline{O'} = (1 - u) \cdot O\overline{P} , \quad (45)$$

on obtient

$$O\overline{P'} = O\overline{O'} + O'\overline{P'} = \left(1 - u + \frac{\rho^2}{u}\right) \cdot O\overline{P} , \quad (46)$$

et enfin la relation

$$\frac{O\overline{P'}}{O\overline{P}} = \frac{\rho^2 - u^2 + u}{u} , \quad (47)$$

qui généralise celle que M. N. A. COURT a obtenue, comme conséquence de propriétés de certaines sphères associées au tétraèdre ABCD, dans le cas particulier où le point P coïncide avec le centre de gravité ¹.

6. — Si l'on suppose, par hypothèse, que

$$\begin{aligned} l^2 &= (a'^2 + b^2 + c^2) , & m^2 &= (a^2 + b'^2 + c^2) , \\ n^2 &= (a^2 + b^2 + c'^2) , & p^2 &= (a'^2 + b'^2 + c'^2) , \end{aligned} \quad (48)$$

les relations (1) deviennent, en grandeur et en signe,

$$\begin{aligned} A\overline{\omega^2} - \rho^2 &= k(a'^2 + b^2 + c^2) = 2O\omega \cdot A\alpha \\ B\overline{\omega^2} - \rho^2 &= k(a^2 + b'^2 + c^2) = 2O\omega \cdot B\beta \\ C\overline{\omega^2} - \rho^2 &= k(a^2 + b^2 + c'^2) = 2O\omega \cdot C\gamma \\ D\overline{\omega^2} - \rho^2 &= k(a'^2 + b'^2 + c'^2) = 2O\omega \cdot D\delta. \end{aligned} \quad (49)$$

¹ *The American Mathematical Monthly*, 1932, p. 198.

En outre, comme on a

$$A\bar{\omega}^2 - B\bar{\omega}^2 = -k[(a^2 - a'^2) - (b^2 - b'^2)], \quad (50)$$

et des expressions analogues pour

$$B\bar{\omega}^2 - C\bar{\omega}^2, \quad C\bar{\omega}^2 - D\bar{\omega}^2, \quad D\bar{\omega}^2 - A\bar{\omega}^2,$$

déduites de celle-ci par des permutations circulaires sur a, b, c et a', b', c' , le point ω est situé sur OG , et

$$O\bar{\omega} : O\bar{G} = -k : -\frac{1}{4} = 4k; \quad (51)$$

d'où il résulte que

$$O\bar{\omega} = 4k \cdot O\bar{G}. \quad (52)$$

Ces relations, et celles du début du paragraphe 2, permettent déjà de dire que les centres des sphères orthogonales aux deux quadruples de sphères ayant pour centres les sommets A, B, C, D du tétraèdre et dont les carrés des rayons respectifs sont proportionnels à la somme des carrés des arêtes des faces opposées aux sommets considérés et à la somme des carrés des arêtes aboutissant à ces sommets, *sont symétriques par rapport au centre O de la sphère circonscrite.*

De plus, appliquant le théorème de STEWART au triangle $AO\omega$, par exemple, on obtient facilement, d'abord la relation

$$A\bar{\omega}^2 = (1 - 4k)^2 \cdot R^2 + k \cdot (a'^2 + b^2 + c^2) - k^2 \cdot \Sigma a^2, \quad (53)$$

et des expressions analogues pour $B\bar{\omega}^2, C\bar{\omega}^2, D\bar{\omega}^2$, puis l'expression

$$\rho^2 = (1 - 4k)^2 \cdot R^2 - k^2 \cdot \Sigma a^2 \quad (54)$$

du carré du rayon de la sphère, de centre ω , orthogonale aux quatre sphères de centres A, B, C, D dont les carrés l^2, m^2, n^2, p^2 des rayons ont les valeurs indiquées par la relation (48).

Remarques. 1° Lorsque $k = \frac{1}{2}$,

$$O\omega = 2OG = O\Omega, \quad \omega \equiv \Omega, \quad \rho^2 = R^2 - \frac{1}{4} \Sigma a^2. \quad (55)$$

Comme dans tout tétraèdre, on a

$$16R^2 \geq \Sigma a^2,$$

la sphère ($\omega \equiv \Omega$), de rayon ρ , est toujours imaginaire.

Des relations (49), (51), on déduit également que

$$\overline{A\alpha} = \frac{a'^2 + b^2 + c^2}{8\overline{OG}}, \quad (56)$$

et des formules analogues pour $B\beta$, $C\gamma$, $D\delta$ obtenues par des permutations circulaires sur a, b, c et a', b', c' .

K étant le point où la droite OG perce le plan radical (π) des sphères (O) et ($\omega \equiv \Omega$), on a donc

$$G\overline{K} = \frac{1}{4}(A\overline{\alpha} + B\overline{\beta} + C\overline{\gamma} + D\overline{\delta}) = \frac{\Sigma a^2}{16\overline{OG}}. \quad (57)$$

D'autre part,

$$G\overline{\Omega}^2 - \rho^2 = O\overline{G}^2 - \rho^2 = R^2 - \frac{1}{16}\Sigma a^2 - R^2 + \frac{1}{4}\Sigma a^2 = \frac{3}{16}\Sigma a^2. \quad (58)$$

Mais, en vertu de (29),

$$G\overline{\Omega}^2 - \rho^2 = \frac{3}{16}\Sigma a^2 = \frac{\Sigma a^2}{16\overline{OG}} \cdot 3\overline{OG} = G\overline{K} \cdot 3\overline{G\Omega} = G\overline{K}_1 \cdot G\overline{\Omega}, \quad (59)$$

K_1 étant le transformé du point K par l'homothétie ($G, 3$).
On peut donc énoncer ce théorème:

Des sommets d'un tétraèdre ABCD, comme centres, on décrit les sphères dont les carrés des rayons sont égaux respectivement à la demi-somme des carrés des arêtes aboutissant aux sommets considérés. Le centre ω de la sphère orthogonale aux quatre sphères coïncide avec le point de MONGE, et le plan polaire du centre G de gravité du tétraèdre, par rapport à la sphère ($\omega \equiv \Omega$), est le transformé du plan radical de cette sphère et de la sphère circonscrite, par l'homothétie ($G, 3$).

2° Observant, par exemple, que

$$k(a^2 + b'^2 + c'^2) + k(a'^2 + b^2 + c^2) = k \cdot \Sigma a^2, \quad (60)$$

on obtient les relations

$$X_a^2 + Y_a^2 = X_b^2 + Y_b^2 = X_c^2 + Y_c^2 = X_d^2 + Y_d^2 = k \cdot \Sigma a^2, \quad (61)$$

entre les carrés des rayons X_a, X_b, X_c, X_d et Y_a, Y_b, Y_c, Y_d des sphères, de centres A, B, C, D, correspondant aux relations (7) et (49).

* * *

Nous avons repris l'étude de la *sphère DE LONGCHAMPS* depuis l'envoi du présent Mémoire à *L'Enseignement mathématique*.

Dans une communication au CONGRÈS INTERNATIONAL DES MATHÉMATIENS (Oslo, 1936)¹, nous avons signalé, entre autres, les théorèmes suivants qui étendent au *tétraèdre général* des propositions déjà anciennes dues à J. GRIFFITHS², sur le triangle, et à J. WOLSTENHOLME³, concernant le tétraèdre *orthocentrique*.

1. — Le centre G de gravité du tétraèdre ABCD est le centre de l'ellipsoïde de STEINER circonscrit dont les demi-axes x, y, z vérifient les relations⁴

$$x^2 + y^2 + z^2 = \frac{3}{16} \Sigma a^2 = \rho_1^2. \quad (62)$$

Il résulte donc des relations (30) et (62) que la *sphère* ($\omega (\equiv) G, \rho_1$) est la *sphère orthoptique de l'ellipsoïde de STEINER circonscrit au tétraèdre ABCD*.

2. — THÉORÈME. — *Dans un tétraèdre quelconque ABCD, la sphère (O) circonscrite, la sphère (O₁) circonscrite au tétraèdre anticomplémentaire A₁B₁C₁D₁, la sphère (ω) DE LONGCHAMPS, la sphère (Γ) décrite sur le segment rectiligne joignant le centre G de gravité au point Ω₁ de MONGE du tétraèdre anticomplémentaire, comme diamètre, et la sphère de MONGE de l'ellipsoïde de STEINER circonscrit au tétraèdre fondamental, appartiennent à un même faisceau.*

¹ Cf. aussi V. THÉBAULT, *Annales de la Société scientifique de Bruxelles*, 1936-72.

² *Nouvelles Annales de Mathématiques*, 1864-345 et 1865-522.

³ *Nouvelles Annales de Mathématiques*, 1871-452.

⁴ La première de ces relations est due à M. E. TURRIÈRE, *L'Enseignement mathématique*, 1930-70.

3. — THÉORÈME. — *Dans un tétraèdre quelconque ABCD, la sphère circonscrite, la sphère décrite sur le segment rectiligne joignant le centre de gravité au point de MONGE, comme diamètre, la sphère de MONGE de l'ellipsoïde de STEINER inscrit, la sphère circonscrite au tétraèdre complémentaire $G_a G_b G_c G_d$ et la sphère DE LONGCHAMPS de ce dernier tétraèdre, appartiennent à un même faisceau. Ces deux propositions complètent les théorèmes C et D qui précèdent.*

LES RELATIONS D'ÉGALITÉ RÉSULTANT
DE L'ADDITION ET DE LA SOUSTRACTION LOGIQUES
CONSTITUENT-ELLES UN GROUPE ?

PAR

Jean PIAGET (Genève).

Le but de cette Note n'est pas d'élaborer de nouveaux procédés de calcul logistique, mais uniquement de chercher si les opérations d'addition et de soustraction, propres à l'Algèbre de la Logique, sont susceptibles, une fois mises sous forme d'égalités, d'engendrer un véritable groupe. La seule nouveauté, au point de vue du calcul logique, est d'avoir généralisé l'opération inverse de l'addition : la « soustraction logique », interprétant ainsi ce que les logiciens appellent la « négation ».

En étudiant le développement génétique de la logique et des notions mathématiques en psychologie de l'enfant, nous avons été frappé de l'importance de la réversibilité croissante des opérations pour la constitution de la raison. C'est ce qui nous a conduit, par analogie avec ce que H. POINCARÉ a montré pour la genèse de l'espace, à nous demander si, indépendamment de toute numération, la formation des classes et des relations logiques implique une structure groupale, parallèle, sur ce plan