

Zeitschrift: L'Enseignement Mathématique
Herausgeber: Commission Internationale de l'Enseignement Mathématique
Band: 36 (1937)
Heft: 1-2: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE

Artikel: LES RELATIONS D'ÉGALITÉ RÉSULTANT DE L'ADDITION ET DE LA SOUSTRACTION LOGIQUES CONSTITUENT-ELLES UN GROUPE ?
Autor: Piaget, Jean
Kapitel: 1. — Éléments du groupe.
DOI: <https://doi.org/10.5169/seals-28030>

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. [Siehe Rechtliche Hinweise.](#)

Conditions d'utilisation

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. [Voir Informations légales.](#)

Terms of use

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. [See Legal notice.](#)

Download PDF: 09.01.2025

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>

qualitatif, à celle du groupe des nombres entiers sur le plan quantitatif.

Nous croyons avoir trouvé des analogies de structure en ce qui concerne la composition, l'associativité et les inversés. Quant à l'opération identique, une différence fondamentale oppose le groupe logique aux groupes arithmétiques: chaque égalité joue le rôle d'identique par rapport aux égalités d'ordre supérieur mais non par rapport aux égalités d'ordre inférieur. Cette opposition, qui tient à l'emboîtement des classes les unes dans les autres et à l'absence d'itération en logique montre assez les différences possibles entre les deux types de groupes, et l'on en remarquera d'autres.

Nous posons donc aux mathématiciens la question de la ressemblance et des différences entre le groupe dont nous esquissons ici la description et les groupes classiques, espérant que les techniciens de l'axiomatique voudront bien nous éclairer sur ces questions qui, si elles n'ont aucune importance pratique, soulèvent, au point de vue de l'analyse génétique de la pensée, le problème du caractère primitif de la notion de groupe.

Qu'il nous soit permis, en remerciant nos collègues R. WAVRE, H. FEHR et G. DE RHAM pour leurs précieux conseils, de dédier ces quelques lignes à la mémoire de G. JUVET, qui a conçu si profondément le rôle philosophique de la notion de groupe.

1. — ÉLÉMENTS DU GROUPE.

Soit un nombre n de classes logiques (cls.) incluses ou emboîtées les unes dans les autres $A < B < C \dots$ etc., ce qui signifie, au point de vue de l'extension, que la cls. A fait partie de la cls. B, bref que tout A est B, mais sans que tout B soit A, etc.

Appelons A' la cls. des individus inclus dans B, mais non dans A; B' la cls. des individus inclus dans C mais non dans B, etc. ¹.

¹ Pour fixer les idées et permettre au lecteur de construire une figure, disons que A = les Genevois; A' = les Suisses romands non Genevois; B = les Suisses romands; B' = les Suisses non romands; C = les Suisses; C' = les Européens non Suisses; D = les Européens; D' = les Hommes non Européens; E = les Hommes, etc.

Nous considérerons comme éléments du groupe n'importe quelle égalité vraie a, b, c, \dots , etc. ou a', b', c', \dots , etc. ou a'', b'', c'', \dots , etc. résultant d'une addition logique ($A + A' = B$) ou d'une soustraction logique quelconque ($B - A' = A$) et ($-A - A' = -B$), etc., etc.

ADDITION ET SOUSTRACTION. L'addition de deux classes consiste à déterminer la plus petite classe qui les contienne toutes deux. La soustraction est l'opération inverse (et les égalités a'', b'', c'' sont les inverses des égalités a, b, c)

$$\begin{array}{lll} (a) A + A' = B, & (a') B - A' = A, & (a'') -A - A' = -B, \\ (b) B + B' = C, & (b') C - B' = B, & (b'') -B - B' = -C, \\ (c) C + C' = D, & (c') D - C' = C, & (c'') -C - C' = -D. \\ \dots, \text{ etc.} & \dots, \text{ etc.} & \dots, \text{ etc.} \end{array}$$

REMARQUE I. La soustraction a le sens de l'*exclusion*, de même que l'addition est constitutive de l'*inclusion*. « Non A » ou « $-A$ » signifie donc « A exclus de x », x étant toujours à déterminer (par exemple $B - A, C - A$, etc.). « Non A » ne prend le sens de « tout ce qui n'est pas A » que si A est exclus de l'« univers du discours » en entier (soit « toutes les cls. » moins la cls. A). C'est cette dernière opération seule que les logiciens appellent en général *négation* et que COUTURAT considère à tort comme une opération « uni-naire » alors qu'elle n'est que la généralisation de l'opération binaire de la soustraction, inverse de l'addition.

TAUTOLOGIE. $A + A = A$, et $-A - A = -A$, puisque A posé une seconde fois n'est pas différent de A posé une première fois.

RÉSORPTION. $A + B = B$, et $-A - B = -B$, puisque A est inclus dans B et que l'exclusion de A est incluse dans l'exclusion de B.

CLASSES NÉGATIVES OU EXCLUES. $A - B = -A'$, $B - C = -B'$, etc. et $-A - A' = -B$ (= inverse de $A + A' = B$).

Ces égalités signifient que si je pose A tout en excluant B, j'exclus seulement A', et que si j'exclus les A et les A' j'exclus tous les B.

ANNULATION D'UNE CLASSE. $A - A = 0$.

REMARQUE II. Si, comme nous le verrons (§ 3), tous les éléments du groupe sont associatifs, par contre les termes $+ A$ et $- A$ (qui ne sont donc pas à eux seuls des éléments du groupe) ne le sont pas lorsqu'on les combine entre eux.

$$(A + A) - A \neq A + (A - A), \quad \text{sinon} \quad 0 = A + 0.$$

Par conséquent, lorsque l'on compose entre eux les éléments du groupe (les égalités $a, b, c, \dots, a', b', c', \dots$, etc.) on ne peut pas simplifier les calculs par tautologie ou résorption en dissociant les sommandes les uns des autres. On ne peut le faire que dans les suites de même signe (sinon $A + A = A$ donnerait $A = A - A$, ce qui est contradictoire avec la règle d'annulation), sans utiliser le 0, et en poussant les résorptions et les tautologies au maximum avant toute simplification (si la simplification précède, les résorptions demeurent incomplètes). Si l'on n'observe pas ces conditions, les seuls procédés de calcul sont la substitution et la simplification, dont l'usage est autorisé puisque $A = A$ est un cas particulier de substitution et résulte de la règle d'annulation.

Par exemple $(a' + b')$ donne

$$C + B - A' - B' = A + B.$$

En remplaçant $(C + B)$ par C et $(A + B)$ par B, j'obtiendrais $(C - A' - B' = B)$, ce qui est absurde.

Par contre, de $(C + B = A + B + A' + B')$, je tire $C = A + A' + B'$, ou $C = B + B'$, ce qui est correct.

L'opération fondamentale du groupe est donc la substitution. Les substitutions intéressantes sont la réunion de deux cls. complémentaires $(A + A')$ et la décomposition en éléments irréductibles. Lors de deux égalités sans terme commun on s'accorde le droit de faire une de ces deux substitutions.