3. – ASSOCIATIVITÉ

Objekttyp: **Chapter**

Zeitschrift: **L'Enseignement Mathématique**

Band (Jahr): **36 (1937)**

Heft 1-2: **L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE**

PDF erstellt am: **12.07.2024**

3. — Associativité.

Les éléments du groupe, ou égalités par addition ou soustraction, sont associatifs, c'est-à-dire que l'on a: $(ab)c = a(bc)$. En effet

$$\left.\begin{array}{ll} (ab) & \mathrm{A} + \mathrm{A}' + \mathrm{B}' = \mathrm{C} \\ (c) & \mathrm{C} + \mathrm{C}' = \mathrm{D} \\ \hline (ab)c & \mathrm{A} + \mathrm{A}' + \mathrm{B}' + \mathrm{C}' = \mathrm{D}\,. \end{array}\right\} = \left\{\begin{array}{ll} (a) & \mathrm{A} + \mathrm{A}' = \mathrm{B} \\ (bc) & \mathrm{B} + \mathrm{B}' + \mathrm{C}' = \mathrm{D} \\ \hline a(bc) & \mathrm{A} + \mathrm{A}' + \mathrm{B}' + \mathrm{C}' = \mathrm{D}\,. \end{array}\right.$$

De même $(a'b')c' = a'(b'c')$

$$\left.\begin{array}{ll} (a'b') & \mathrm{C} - (\mathrm{A}' + \mathrm{B}') = \mathrm{A} \\ (c') & \mathrm{D} - \mathrm{C}' = \mathrm{C} \\ \hline (a'b')c' & \mathrm{D} - (\mathrm{C}' + \mathrm{B}' + \mathrm{A}') = \mathrm{A}\,. \end{array}\right\} = \left\{\begin{array}{ll} (a') & \mathrm{B} - \mathrm{A}' = \mathrm{A} \\ (b'c') & \mathrm{D} - \mathrm{C}' - \mathrm{B}' = \mathrm{B} \\ \hline a'(b'c') & \mathrm{D} - (\mathrm{C}' + \mathrm{B}' + \mathrm{A}') = \mathrm{A}\,. \end{array}\right.$$

De même, on a

$$\begin{aligned} (a''b'')c'' &= a''(b''c''), \\ (ab')c' &= a(b'c')\ , \\ (aa')a &= a(a'a)\ , \quad \text{etc.} \end{aligned}$$

A eux seuls, comme nous l'avons déjà dit (§ 1, Rem. II), les sommandes $+ \mathrm{A}$ et $- \mathrm{A}$ ne sont pas associatifs entre eux. C'est pourquoi les classes et leurs additions, pas plus que les ensembles et leurs réunions, ne peuvent constituer comme telles un groupe, tandis que les égalités considérées ici comme éléments sont associatives.

4. — Opérations inverses et identique.

Nous avons appliqué jusqu'ici les deux premiers critères du groupe: la composition et l'associativité. Quant à l'existence des opérations inverses, elle est postulée par les axiomes du § 1. L'inverse de l'élément a $(\mathrm{A} + \mathrm{A}' = \mathrm{B})$ est l'élément a'' $(- \mathrm{A} - \mathrm{A}' = - \mathrm{B})$, puisque composés ensemble ils donnent $0 = 0$ ou $\mathrm{A} = \mathrm{A}$.

A la tautologie et à la résorption directes correspondent, d'autre part, la tautologie et la résorption inverses et, à l'addition, la soustraction, etc. Le succès des opérations de composition atteste l'existence, c'est-à-dire la non-contradiction de ces