4. — Opérations inverses et identique.

3. — Associativité.

Les éléments du groupe, ou égalités par addition ou soustraction, sont associatifs, c'est-à-dire que l'on a: $(ab)c = a(bc)$. En effet

$$\left.\begin{array}{ll} (ab) & A + A' + B' = C \\ (c) & C + C' \quad\quad = D \\ \hline (ab)c & A + A' + B' + C' = D\,. \end{array}\right\} = \left\{\begin{array}{ll} (a) & A + A' = B \\ (bc) & B + B' + C' = D \\ \hline a(bc) & A + A' + B' + C' = D\,. \end{array}\right.$$

De même $(a'b')c' = a'(b'c')$

$$\left.\begin{array}{ll} (a'b') & C - (A' + B') = A \\ (c') & D - C' = C \\ \hline (a'b')c' & D - (C' + B' + A') = A\,. \end{array}\right\} = \left\{\begin{array}{ll} (a') & B - A' = A \\ (b'c') & D - C' - B' = B \\ \hline a'(b'c') & D - (C' + B' + A') = A\,. \end{array}\right.$$

De même, on a

$$\begin{aligned} (a''b'')c'' &= a''(b''c''), \\ (ab')c' &= a(b'c')\ , \\ (aa')a &= a(a'a)\ , \quad \text{etc.} \end{aligned}$$

A eux seuls, comme nous l'avons déjà dit (§ 1, Rem. II), les sommandes $+$ A et $-$ A ne sont pas associatifs entre eux. C'est pourquoi les classes et leurs additions, pas plus que les ensembles et leurs réunions, ne peuvent constituer comme telles un groupe, tandis que les égalités considérées ici comme éléments sont associatives.

4. — Opérations inverses et identique.

Nous avons appliqué jusqu'ici les deux premiers critères du groupe: la composition et l'associativité. Quant à l'existence des opérations inverses, elle est postulée par les axiomes du § 1. L'inverse de l'élément a $(A + A' = B)$ est l'élément a'' $(-A - A' = -B)$, puisque composés ensemble ils donnent $0 = 0$ ou $A = A$.

A la tautologie et à la résorption directes correspondent, d'autre part, la tautologie et la résorption inverses et, à l'addition, la soustraction, etc. Le succès des opérations de composition atteste l'existence, c'est-à-dire la non-contradiction de ces opérations inverses. Au reste, dans la pensée concrète, la soustraction ou exclusion est aussi effective que l'addition ou inclusion: pour savoir inclure correctement il faut savoir exclure.

Quant à l'opération identique, A = A, elle est impliquée en toute transformation. En outre, chaque égalité joue le rôle d'opération identique à l'égard des égalités de rang supérieur et d'elle-même. C'est là une différence fondamentale avec les groupes mathématiques, qui tient aux règles de tautologie et de résorption, c'est-à-dire à l'absence d'itération en logique.

5. — Remarques finales.

Il semble ainsi que les relations essentiellement qualitatives qui caractérisent l'addition et la soustraction logiques sont susceptibles de constituer des groupes analogues aux groupes mathématiques, à condition de choisir comme éléments non pas les cls. elles-mêmes, ni les opérations + A et — A mais les égalités qui résultent de ces opérations.

Il nous reste à ajouter, pour justifier le choix de nos axiomes, que les opérations auxquelles ils donnent lieu sont celles mêmes qu'utilise toute pensée logique : ils ne sauraient donc être contradictoires entre eux et cela indépendamment du groupe que l'on peut former en les associant.

C'est ainsi que si j'apprends qu'un caractère est commun aux Vertébrés et aux Invertébrés, j'en conclus qu'il est général chez tous les animaux: je pratique ainsi l'addition de cls.: (Vertébrés) + (Invertébrés) = (Animaux). Si l'on ajoute qu'un autre caractère est spécial aux Invertébrés, j'exclus les Vertébrés de la cls. qu'il définit, et cela au moyen d'une soustraction logique: (Invertébrés) = (Animaux) — (Vertébrés). Quant à la tautologie et à la résorption, elles vont de soi, étant évident que l'on ne peut additionner un concept à lui-même ou à l'une de ses propres parties. Seules les classes négatives pourraient donner l'impression d'un formalisme vide de sens. Mais un jugement tel que « Si j'exclus de la classe des Plantes les Vertébrés et les Invertébrés, j'en exclus tous les Animaux » est un jugement vrai, qui s'écrit (— A — A′ = — B). En outre, dès que l'on comprend que l'exclusion est toujours relative à un