5. — Remarques finales.

Objekttyp: **Chapter**

Zeitschrift: **L'Enseignement Mathématique**

Band (Jahr): **36 (1937)**

Heft 1-2: **L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE**

PDF erstellt am: **13.09.2024**

opérations inverses. Au reste, dans la pensée concrète, la soustraction ou exclusion est aussi effective que l'addition ou inclusion: pour savoir inclure correctement il faut savoir exclure.

Quant à l'opération identique, A = A, elle est impliquée en toute transformation. En outre, chaque égalité joue le rôle d'opération identique à l'égard des égalités de rang supérieur et d'elle-même. C'est là une différence fondamentale avec les groupes mathématiques, qui tient aux règles de tautologie et de résorption, c'est-à-dire à l'absence d'itération en logique.

5. — Remarques finales.

Il semble ainsi que les relations essentiellement qualitatives qui caractérisent l'addition et la soustraction logiques sont susceptibles de constituer des groupes analogues aux groupes mathématiques, à condition de choisir comme éléments non pas les cls. elles-mêmes, ni les opérations + A et — A mais les égalités qui résultent de ces opérations.

Il nous reste à ajouter, pour justifier le choix de nos axiomes, que les opérations auxquelles ils donnent lieu sont celles mêmes qu'utilise toute pensée logique : ils ne sauraient donc être contradictoires entre eux et cela indépendamment du groupe que l'on peut former en les associant.

C'est ainsi que si j'apprends qu'un caractère est commun aux Vertébrés et aux Invertébrés, j'en conclus qu'il est général chez tous les animaux: je pratique ainsi l'addition de cls.: (Vertébrés) + (Invertébrés) = (Animaux). Si l'on ajoute qu'un autre caractère est spécial aux Invertébrés, j'exclus les Vertébrés de la cls. qu'il définit, et cela au moyen d'une soustraction logique: (Invertébrés) = (Animaux) — (Vertébrés). Quant à la tautologie et à la résorption, elles vont de soi, étant évident que l'on ne peut additionner un concept à lui-même ou à l'une de ses propres parties. Seules les classes négatives pourraient donner l'impression d'un formalisme vide de sens. Mais un jugement tel que « Si j'exclus de la classe des Plantes les Vertébrés et les Invertébrés, j'en exclus tous les Animaux » est un jugement vrai, qui s'écrit (— A — A′ = — B). En outre, dès que l'on comprend que l'exclusion est toujours relative à un terme déterminé, sauf si on la rapporte à l'Univers du Discours tout entier (auquel cas seulement — A signifie « tout ce qui n'est pas A » ou « A n'existe pas »), les difficultés cessent. Par exemple, étant donné un jeu de perles en bois et en verre de différentes couleurs, je puis répartir ces perles en deux ou plusieurs colliers et demander de reconstituer la couleur et la matière de ces ensembles au moyen de conditions telles que celle-ci : « Dans ce collier il n'y a aucune perle en bois sauf les brunes ». Si B = les perles en bois considérées, si A = les perles brunes en bois et si A′ = les perles en bois non-brunes, j'utilise ainsi nécessairement la relation (+ A — B = — A′) pour définir la condition posée, et « — A′ » prend le sens très précis d'une classe exclue parce qu'incluse dans une classe plus vaste également exclue (— B) sauf la partie « + A ».

On peut donc dire que chacune des opérations définie par nos axiomes correspond à une opération réelle de l'esprit, même si le jeu formel des combinaisons possibles peut ne pas correspondre terme à terme à la marche des raisonnements concrets.

Cela dit, examinons pour terminer en quoi le groupe des égalités par addition et soustraction logiques ainsi formé diffère d'un groupe mathématique tel que le groupe additif des nombres entiers positifs et négatifs. La différence essentielle et qui, sans doute, entraîne toutes les autres, tient à l'itération : l'opération + 1 peut s'itérer (1 + 1 = 2) tandis que (A + A′ = B) ne le peut pas (parce que A + A = A). Cela revient à dire que 1 constitue une unité vraie et que A est simplement le point de départ des additions logiques. Celles-ci peuvent sans doute se répéter à chaque terme nouveau, mais cette répétition indéfinie A + A′ = B, B + B′ = C, etc. n'est pas une itération mathématique, faute précisément d'unité itérante. Toute l'opposition du concept (ou cls. logique) et du nombre est en jeu dans cette différence, aussi n'avons-nous pas à y insister ici.

En second lieu, on pourrait subdiviser les A′, B′, C′, etc. en autant de sous-classes que l'on voudrait, mais les sous-classes de A′ ne seraient pas parties de A ni l'inverse, les sous-classes de B′ ne le seraient pas de B ni l'inverse, etc. Au contraire, si nous remplaçons les symboles par des nombres (A = 4, A′ = 6, B = 10, B′ = 24, C = 34, C′ = 48, etc.), les A′, B′, C′, etc.

sont aussi bien comparables aux A, B, C qu'aux termes supérieurs. Cela tient au fait que tous les nombres entiers sont engendrés par l'itération de $+ 1$ ou de $- 1$ tandis que les classes sont hétérogènes les unes aux autres et ne peuvent être classées en systèmes hiérarchiques que par juxtaposition des ensembles d'où l'on part et sans construction interne réelle.

En troisième lieu, et par cela même, l'extension et la compréhension sont en proportions inverses dans le cas des classes logiques (B est plus étendu que A mais plus pauvre en caractères, puisque A a tous les caractères de B plus les siens propres) et directes dans le cas des nombres ($n + 1$ comprend n en tant que partie et est donc plus étendu, tandis que sa définition implique celle de n et est donc plus compréhensive). Cette différence tient encore à l'itération: si l'on pouvait construire ou engendrer les classes comme les nombres, la définition d'un tout donné impliquerait celle de chacune de ses parties et la compréhension serait proportionnelle à l'extension.

En quatrième lieu, si l'on distinguait des sous-classes en A (A_1, A_2, A_3, ...) il faudrait faire procéder le groupe de la sous-classe d'ordre inférieur et appeler A l'une de ces sous-classes, puisque A ne constitue pas une unité génératrice, mais simplement un point de départ, tandis que l'unité arithmétique 1 peut être divisée en fraction sans perdre sa valeur d'unité génératrice du groupe des nombres entiers.

Enfin, en cinquième lieu, la valeur d'un sommande $+ 1$ est invariable en arithmétique, tandis que $+ A$ change de valeur selon les opérations $A + A = A$; $A' + A = B$; $B + A = B$, etc. Cette cinquième différence tient encore à l'absence d'itération en logique. Or, notons-le, c'est pour cette raison que les propriétés $A + A = A$ et $A + B = B$ (et les inverses) ne peuvent s'appliquer sans réserves comme procédés de simplification. Sans certaines restrictions, en effet, un terme tel que $+ A$ ou $- A$ présente une valeur équivoque selon la relation dont il est issu ou dans laquelle il est engagé, d'où les contradictions inévitables [1].

P. S. — Il est facile, de même, de construire un groupe des égalités résultant de la multiplication logique ou des groupes de Relations proprement dites (comme le groupe des relations généalogiques). Nous y reviendrons ultérieurement.

---

[1] Voir remarque II du § 1.