Chapitre I. — Définitions et théorèmes généraux.

Objekttyp: **Chapter**

Zeitschrift: **L'Enseignement Mathématique**

Band (Jahr): **36 (1937)**

Heft 1-2: **L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE**

PDF erstellt am: **12.07.2024**

translation; d'une figure à une autre inversement égale, par un *retournement*, qui se réduit à une symétrie autour d'une droite, suivie d'une translation parallèle à cette droite.

Chapitre I. — Définitions et théorèmes généraux.

§ **2.** — *Définition.* — *Une transformation ponctuelle réelle, biunivoque, et continue, du plan sera dite* circulaire *si elle transforme un cercle quelconque en un autre cercle.* Dans cette définition le mot « cercle » désigne une circonférence proprement dite ou une droite.

Exemple: une inversion, un produit d'inversions et de similitudes.

Les transformations circulaires du plan forment un groupe. Evident.

Théorème I. — *Si une transformation circulaire* Γ *est définie pour tous les points du plan euclidien, elle se réduit à une similitude.*

Soit en effet A' le transformé d'un point quelconque A; D'_1 et D'_2 deux droites passant par A'. Les cercles D_1 et D_2 qui ont D'_1 et D'_2 pour homologues se coupent en A et en un autre point $\overline{A}$, qui ne peut avoir d'homologue $\overline{A}'$, car ce point $\overline{A}'$ devrait être commun à D'_1 et D'_2, tout en étant distinct de A'. Donc D_1 et D_2 sont nécessairement des droites.

Par suite, les droites de la figure F' sont les transformées des droites de F; Γ est donc une homographie. Comme elle transforme les cercles en cercles, c'est une similitude.

Corollaire. — *Si* Γ *ne se réduit pas à une similitude, il existe au moins un point* Φ *du plan pour lequel elle n'est pas définie.*

Le raisonnement qui précède montre que les cercles passant par un tel point Φ sont transformés en droites. Nous allons montrer qu'il n'existe qu'un point Φ, c'est-à-dire que:

Théorème II. — *Une transformation circulaire proprement dite* Γ *étant donnée, il existe dans le plan un point* Φ *et un seul tel que tous les cercles passant par* Φ *soient transformés en droites.*

En effet, s'il existait deux points singuliers de ce genre Φ_1 et Φ_2, on pourrait prendre des couples de cercles C_1 et C_2 passant respectivement par Φ_1 et Φ_2, se coupant en A et B. Γ serait définie pour A et B, et transformerait (C_1) et (C_2) en deux droites (C'_1) et (C'_2) qui devraient se couper en deux points distincts A′ et B′, ce qui est absurde. Il existe donc un point Φ et un seul.

Le point Φ sera dit *foyer-objet* de la transformation Γ.

Théorème III. — *Il existe dans le plan un point Ψ et un seul tel que les cercles transformés de toutes les droites du plan passent par Ψ.*

Le point Ψ sera le *foyer-image de* Γ.

Ce théorème se démontre d'une manière analogue au théorème II. Ou encore, il résulte de l'application du théorème II à la transformation Γ^{-1} inverse de Γ. Il résulte aussi des propriétés que nous allons donner maintenant et qui découlent elles-mêmes, si l'on veut, du seul théorème II.

§ **3.** — Théorème IV. — *Toute transformation circulaire proprement dite* Γ *est le produit d'une inversion par une égalité* (déplacement ou retournement).

Soit en effet I une inversion de pôle Φ et de puissance arbitraire. Soit F la figure primitive, F′ la transformée par Γ, F_0 par I. On passe de F_0 à F′ par une transformation circulaire, produit de I par Γ, qui se réduit à une similitude Σ, car les droites de F′ correspondent aux cercles de F passant par Φ, et de même les droites de F_0.

Donc $F' = F_0 \cdot \Sigma$ et $\Gamma = \mathrm{I}\Sigma$

En choisissant convenablement la puissance de l'inversion I, on a

$$\boxed{\Gamma = \mathrm{I}\Delta} \qquad (1)$$

Δ étant soit un déplacement $\mathcal{D}$, soit un retournement D.

Corollaire. — Les transformations Γ conservent les angles (en grandeur).

Elles se divisent en deux classes: la première, celle des *transformations circulaires directes*

$$\boxed{\mathcal{C} = \mathrm{ID}}\ , \qquad (2)$$

où D est un retournement, conserve les angles en grandeur et en signe. La deuxième conserve les angles en grandeur, mais change leur signe: c'est celle des *transformations circulaires inverses :*

$$\boxed{\mathrm{C} = \mathrm{I}\mathcal{D}} \, , \tag{3}$$

où $\mathcal{D}$ est un déplacement.

Chacune de ces deux familles est à 6 paramètres: 3 pour l'inversion, 3 pour le déplacement ou le retournement.

Les $\mathcal{C}$ forment un groupe; les C non.

Point à l'infini du plan. — C'est un point impropre ∞ défini comme étant commun à toutes les droites du plan. Une droite est un cercle qui passe par ∞. Une transformation Γ transforme son foyer-objet Φ en ∞, et transforme ∞ en son foyer-image Ψ. Elle est donc *définie et biunivoque pour tous les points du plan ainsi étendu par l'adjonction du point impropre* ∞.

Chapitre II. — Groupe des transformations circulaires directes.

§ **4**. — La transformation générale $\mathcal{C} = \mathrm{ID}$ est définie par un cercle (I) de centre Φ (cercle d'inversion) et un vecteur $\overrightarrow{\mathrm{D}}$ de retournement. Le foyer image Ψ est le transformé de Φ par le retournement D. Les éléments géométriques conservés dans l'inversion I subissent simplement le retournement: tel est le cas du cercle (I) et des cercles orthogonaux à celui-là, en particulier des droites passant par Φ, qui sont *les seules droites du plan transformées en droites par* $\mathcal{C}$.

Soit P le point où une droite (L) passant par Φ coupe son homologue (L′) (qui passe naturellement par Ψ) (fig. 1); quand (L) tourne autour de Φ, P décrit une hyperbole équilatère (H) passant par Φ et Ψ, et admettant comme asymptotes la droite (D) et la perpendiculaire (Δ) menée à (D) au milieu O de $\Phi\Psi$. (L) et (L′) découpent sur (D) et (Δ) deux segments constants

$$\overrightarrow{dd'} = \overrightarrow{\mathrm{D}} \, , \quad \overrightarrow{\delta\delta'} = \overrightarrow{\Phi\varphi} \, .$$