Zeitschrift: L'Enseignement Mathématique
Herausgeber: Commission Internationale de l'Enseignement Mathématique
Band: 36 (1937)
Heft: 1-2: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE

Artikel: LES TRANSFORMATIONS CIRGULAIRES RÉELLES DU PLAN
Autor: Guilhem, R. Saint
Kapitel: Chapitre IV. — Application à la décomposition des diverses transformation .
DOI: https://doi.org/10.5169/seals-28031

simple I, la seconde l'inversion de puissance négative. (Dans le cours de cette étude, le mot « inversion » désigne toujours l'inversion de puissance positive.)

Pour $p = 2$, on obtient les deux antiinvolutions quaternaires:

$$C_2\left(\alpha = \frac{\pi}{2}\right) \quad \text{et} \quad C_{2'}\left(\alpha = \frac{3\pi}{2}\right). \quad \text{Etc. ...}$$

Remarque. Il était clair *a priori* qu'une C ne pouvait être involutive d'ordre impair $2p + 1$, car $C^{2p+1} = \mathcal{C}^p.C$ est une transformation inverse C′, qui ne se réduit jamais à la transformation identique.

Chapitre IV. — Application à la décomposition des diverses transformations Γ.

§ **12.** — *Groupe des transformations* Γ *ayant les mêmes pôles.* — On a vu qu'il était possible de transformer une Γ isolée en une image $\mathcal{S}$, S, ou T, c'est-à-dire en une autre Γ ayant un pôle à l'infini. Une pareille opération est évidemment impossible pour le groupe Γ lui-même, c'est-à-dire pour toutes les Γ du plan prises simultanément. Mais elle est possible pour le groupe partiel des Γ ayant un pôle déterminé. Prenons ici un groupe encore plus restreint: celui des Γ ayant en commun leurs deux pôles ω et ϖ; une Γ auxiliaire ayant ϖ pour foyer-objet transforme ce groupe partiel en celui des similitudes ayant ω pour pôle. Par suite:

Le produit de deux $\mathcal{C}$ ayant les mêmes pôles ω et ϖ, de rapports k_1 *et* k_2, *d'angles* α_1 *et* α_2, *respectivement, est une $\mathcal{C}$ de mêmes pôles, de rapport* $k_1 k_2$ *et d'angle* $\alpha_1 + \alpha_2$.

Toutes les transformations $\mathcal{C}$ du groupe ainsi défini sont permutables entre elles. Celles d'un même type (homothétie ou rotation) forment un sous-groupe.

Les $\mathcal{C}_h$ et $\mathcal{C}_r$ sont dites « transformations circulaires simples » parce qu'elles admettent un faisceau linéaire de cercles doubles; chacune d'elles est caractérisée par un invariant k ou α. Une

C_l sera également dite « simple »; elle admet aussi un faisceau de cercles invariants. Cela posé,

THÉORÈME XVI. — *Toute $\mathcal{C}$ autre qu'une $\mathcal{C}$ simple peut être considérée comme le produit de deux $\mathcal{C}$ simples d'espèces différentes et de mêmes pôles.*

Evident d'après ce qui précède.

Introduisons maintenant les transformations circulaires inverses:

Le produit de deux C_h de pôles ω et ϖ est une $\mathcal{C}$ de mêmes pôles. En particulier si les deux C_h ont les mêmes cercles doubles, leur produit est une $\mathcal{C}_h$. Plus particulièrement encore, *le carré d'une C_h est une $\mathcal{C}_h$.* Réciproquement, toute $\mathcal{C}$ peut être considérée comme le produit de deux C_h, d'une infinité double de manières; toute $\mathcal{C}_h$ comme le produit de deux C_h de mêmes cercles doubles, d'une infinité double de manières, ou comme le carré d'une C_h, d'une infinité simple de manières.

Le produit de deux C_r de pôles ω et ϖ est une $\mathcal{C}$ de mêmes pôles. Car le produit de deux T de même pôle ω est une $\mathfrak{S}$.

Si les deux C_r ont même cercle double, leur produit est une $\mathcal{C}_r$. (Car le produit des deux T est alors une rotation.)

Le carré d'une C_r est une $\mathcal{C}_r$.

Réciproquement, toute $\mathcal{C}$ peut être considérée comme le produit de deux C_r, d'une infinité double de manières; toute $\mathcal{C}_r$ comme le produit de deux C_r de même cercle double, d'une infinité double de manières, ou comme le carré d'une C_r d'une infinité simple de manières.

THÉORÈME XVII. — *Le produit d'une C_h par une C_r de mêmes pôles ω et ϖ est une involution plane $\mathcal{I}$.*

En effet ce produit est une $\mathcal{C}$ où ω et ϖ sont conjugués; or l'involution plane $\mathcal{I}$ est la seule $\mathcal{C}$ admettant des couples de points conjugués.

Vérification par les images: on peut écrire $S = \mathcal{H}R_1$, $T = \mathcal{R}I$ ou encore $R_1 R' I$; d'où $ST = \mathcal{H}R_1 R_1 R'I = \mathcal{H} R' I = R' \mathcal{H} I = R'I' = \mathcal{I}$. (Les R désignent, comme d'habitude, des renversements, c'est-à-dire des symétries autour d'une droite.) On aboutit encore aisément au résultat en raisonnant sur les équations intrinsèques. Réciproquement, toute involution plane peut être considérée comme le produit d'une C_h par une C_r de mêmes pôles, et cela d'une infinité double de manières.

Le produit d'une $\mathcal{C}$ *par une* C_h^* *de mêmes pôles est une* C_h *de mêmes pôles.*

Le produit d'une $\mathcal{C}$ *par une* C_r *de mêmes pôles est une* C_r *de mêmes pôles.* Etc...

Réciproques analogues aux précédentes. En outre:

THÉORÈME XVIII. — *Toute* C_h *peut être considérée comme le produit d'une* $\mathcal{C}_h$ *par une inversion dont le cercle passe par les pôles de cette* $\mathcal{C}_h$, *et cela d'une seule manière. Toute* C_r *peut être considérée comme le produit d'une* $\mathcal{C}_r$ *par une inversion échangeant les deux pôles de cette* $\mathcal{C}_r$ *et cela d'une seule manière.*

Si l'on appelle transformations *simples* les Γ admettant au moins un faisceau linéaire de cercles doubles, on voit que les $\mathcal{C}$ simples, conformément à une définition déjà donnée, sont les $\mathcal{C}_h$, $\mathcal{C}_l$ et $\mathcal{C}_r$; au contraire, les C simples comprennent la seule inversion I, qui admet d'ailleurs un réseau linéaire de cercles doubles, c'est-à-dire une infinité de faisceaux linéaires. Cela posé, les résultats précédents se résument ainsi:

THÉORÈME XIX. — *Toute transformation* Γ *peut être considérée, et cela d'une manière unique, comme le produit de deux transformations simples « conjuguées », c'est-à-dire dont l'une conserve le couple des pôles de l'autre.*

Cette propriété tient au fond à ce que, dans les équations intrinsèques d'une Γ, les variables τ et σ sont séparées: une équation donne τ' en fonction de τ, l'autre σ' en fonction de σ, de sorte que Γ peut être considéré comme le produit d'une transformation sur les τ seuls, par une transformation sur les σ seuls, les cercles $\tau = c^{te}$ et $\sigma = c^{te}$ étant orthogonaux [1].

Cas particulier. — Groupe des transformations à pôles confondus en un même point O.

Le produit de deux $\mathcal{C}_l$ de même pôle O est une $\mathcal{C}_l$ de pôle O. Le produit de deux C_l de même pôle O est une $\mathcal{C}_r$ ayant un de

[1] Si nous avons donné ici un certain nombre de résultats à peu près évidents, c'est en vue d'interprétations ultérieures intéressantes.

ses pôles en O; si les deux C_l ont le même cercle double, c'est une $\mathcal{C}_l$ de pôle O. Le carré d'une C_l est une $\mathcal{C}_l$ de même pôle. Le produit d'une C_l par une $\mathcal{C}_l$ de même pôle est une C_l de même pôle.

Réciproquement toute $\mathcal{C}_l$ peut se décomposer en un produit de deux $\mathcal{C}_l$ de même pôle, d'une double infinité de manières; toute C_l en un produit d'une $\mathcal{C}_l$ par une C_l de même pôle, également d'une double infinité de manières; etc...

Ce sont des cas-limites des propriétés données plus haut concernant la décomposition d'une Γ quelconque en un produit de deux Γ « simples ».

§ **13.** — *Groupe des* Γ *ayant un point double* ϖ *commun.* — Ce groupe a pour image le *groupe des similitudes du plan.* On déduit de là toutes ses propriétés, en particulier l'existence de divers sous-groupes.

Exemples: groupe des $\mathcal{C}_r$ et $\mathcal{C}_l$ admettant ϖ comme point double; groupe des $\mathcal{C}_r$, $\mathcal{C}_l$ et C_l admettant ϖ comme pôle; etc...

On détaillerait facilement les différents cas particuliers.

§ **14.** — *Etude du produit de* n *inversions successives.* — Le produit de n inversions successives est évidemment une transformation circulaire Γ. Elle sera directe si n est pair, inverse si n est impair. Pour $n = 1$, on retrouve ainsi la plus simple des C, qui est l'inversion simple I.

Cas de n $= 2$. — On a une $\mathcal{C}$, mais on n'a pas la $\mathcal{C}$ la plus générale, bien que celle-ci dépende de six paramètres, et que chaque inversion dépende de trois paramètres. Effectivement:

Théorème XX. — *Le produit de deux inversions est une* $\mathcal{C}$ *simple, savoir une* $\mathcal{C}_h$, *une* $\mathcal{C}_l$, *ou une* $\mathcal{C}_r$, *suivant que les deux cercles d'inversion* (I_1) *et* (I_2) *ont leurs points communs imaginaires, confondus ou réels.*

Cherchons en effet la forme du parallélogramme de base de $\mathcal{C} = I_1 I_2$:

a) Si les cercles (I_1) et (I_2) sont *extérieurs* (fig. 17), soit O le point où leur axe radical (D) coupe la ligne des centres $I_1 I_2$. Le cercle de centre O orthogonal à (I_1) et à (I_2) coupe la droite $I_1 I_2$ en ω et ϖ; on voit que I_1 transforme ω en ϖ, et I_2 ϖ en ω, de sorte que ω et ϖ sont les points doubles de $\mathcal{C}$. Par ailleurs le foyer objet Φ est l'inverse de I_2 par rapport à (I_1); de même Ψ

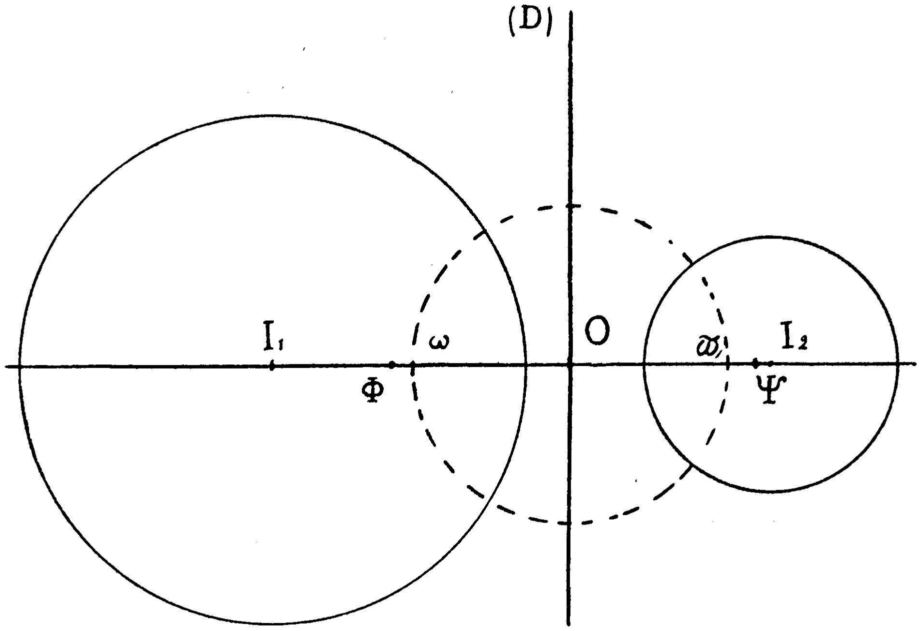

Fig. 17.

est l'inverse de I_1 par rapport à (I_2). Le parallélogramme de base est donc aplati; $\mathcal{C}$ est du type homothétie $\mathcal{C}_h$, avec un rapport $k = \dfrac{\Phi\varpi}{\Phi\omega}$. Si (I_1) et (I_2) ont les paramètres t_1 et t_2 par rapport aux pôles ω et ϖ, on a

$$\boxed{k = \frac{t_2^2}{t_1^2}} \; . \tag{19}$$

Pour le voir, il suffit de prendre le plan-image, dans lequel les cercles (i_1) et (i_2) sont concentriques; les inversions I_1 et I_2 ont pour images les inversions (i_1) et (i_2) dont les équations sont respectivement:

$$\rho\rho_1 = r_1^2 \,, \qquad \rho_1\rho' = r_2^2 \,,$$

ou encore

$$\tau\tau_1 = t_1^2 \,, \qquad \tau_1\tau' = t_2^2 \,,$$

d'où

$$\frac{\rho'}{\rho} = \frac{r_2^2}{r_1^2} = \frac{\tau'}{\tau} = \frac{t_2^2}{t_1^2},$$

car

$$\rho = a\tau \qquad \rho_1 = a\tau_1 \qquad \rho' = a\tau'$$

$$r_1 = at_1 \qquad r_2 = at_2 \; .$$

On retrouve ainsi que I_1I_2 est du type homothétie, et on a la valeur annoncée de k.

b) Si les cercles (I_1) et (I_2) sont *tangents*, on a deux points doubles confondus avec le point de contact O. Cela caractérise le type translation $\mathcal{C}_l$. On retrouve ce résultat en prenant l'image (foyer objet O) car les deux inversions ont pour images des symétries autour de deux droites parallèles (fig. 18).

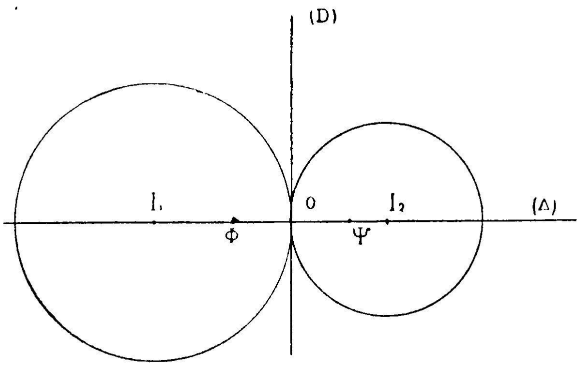

Fig. 18.

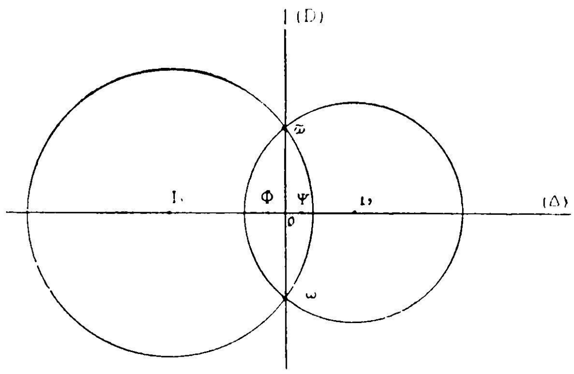

Fig. 19.

c) Les cercles (I_1) et (I_2) *se coupent* en ω et ϖ (fig. 19). Ces deux points sont manifestement les points doubles de $\mathcal{C}$; il en résulte que le parallélogramme de base est un losange; donc $\mathcal{C}$ est du type rotation $\mathcal{C}_r$.

On retrouve ce résultat en prenant l'image, et on obtient ainsi la valeur de l'angle invariant $\alpha = (\overrightarrow{\Phi\omega}, \overrightarrow{\Phi\varpi})$, qui est égal au double de l'angle γ sous lequel se coupent les deux cercles.

$$\boxed{\alpha = 2\gamma} \quad \text{ou} \quad \boxed{\alpha = 2(\sigma_2 - \sigma_1)} \qquad (20)$$

On voit que $\mathcal{C}_r = \mathrm{I}_1\mathrm{I}_2$ peut être involutive d'ordre p, si $\alpha = \frac{2\pi}{p} + 2m\pi$ ou $\gamma = \frac{\pi}{p} + m\pi$, c'est-à-dire *si les deux cercles d'inversion se coupent sous l'angle* $\frac{\pi}{p}$.

En particulier $\mathcal{C}_r$ *est réciproque, c'est-à-dire est une involution plane, si les deux cercles d'inversion* (I_1) *et* (I_2) *sont orthogonaux.*

d) Les cercles (I_1) et (I_2) sont intérieurs. Ce cas n'est pas distinct de celui des cercles extérieurs. On a encore $\mathrm{I}_1\mathrm{I}_2 = \mathcal{C}_h$.

Théorème XXI. — Réciproquement: *Toute* $\mathcal{C}$ *simple peut être considérée comme le produit de deux inversions, cela d'une infinité simple de manières.*

Les formules (19) et (20) définissent les couples de cercles d'inversion correspondants. On remarque que le produit de deux inversions ne change pas si l'on remplace les cercles (I_1) et (I_2) par deux cercles (I_1') et (I_2') du même faisceau linéaire, tels que le rapport k ou l'angle α (suivant le cas) soit conservé, c'est-à-dire que

$$\frac{t_2'}{t_1'} = \frac{t_2}{t_1}$$

dans le cas d'une $\mathcal{C}_h$, $\sigma_2' - \sigma_1' = \sigma_2 - \sigma_1$, ou encore $\gamma' = \gamma$ dans le cas d'une $\mathcal{C}_r$.

Cas de n $= 3$. — On obtient la C la plus générale d'après le théorème suivant:

Théorème XXII. — *Toute transformation* C *peut être considérée comme le produit de trois inversions* $\mathrm{I}_1\mathrm{I}_2\mathrm{J}$, *le cercle* (J) *étant orthogonal aux cercles* (I_1) *et* (I_2), *cela d'une infinité simple de manières.*

En outre: l'ordre de ces trois opérations peut être changé, en s'astreignant seulement à effectuer I_2 après I_1; c'est-à-dire que l'on a indifféremment:

$$\mathrm{C} = \mathrm{I}_1\mathrm{I}_2\mathrm{J} = \mathrm{I}_1\mathrm{J}\mathrm{I}_2 = \mathrm{J}\mathrm{I}_1\mathrm{I}_2 \,.$$

Suivant ce qui vient d'être dit ci-dessus, on peut remplacer $\mathrm{I}_1\mathrm{I}_2$ par deux inversions $\mathrm{I}_1'\mathrm{I}_2'$, un des cercles I_1' ou I_2' étant pris arbitrairement dans le faisceau linéaire.

Groupe Γ du plan.

Invariant caractéristique de chaque type de la famille	Néant (1 seul type intrinsèque)	k	Néant (1 seul type intrinsèque)	α	k et α
Circulaire inverse C Image:	Inversion I Renversement R	Type C_h Similitude inverse S	Type C_l Retournement D	Type C_r Antirotation T	
Pôles:	1 cercle de points doubles	2 points doubles	1 point double	1 couple de points conjugués	
Cercles remarquables:	1 réseau linéaire de cercles doubles	2 cercles doubles 1 faisceau linéaire de cercles 2 à 2 conjugués	1 cercle double 1 faisceau linéaire de cercles 2 à 2 conjugués	1 cercle double 1 faisceau linéaire de cercles 2 à 2 conjugués	
Circulaire directe $\mathcal{C} = C^2$ Image:	Transformation identique »	« Homothétie » $\mathcal{C}_h$ Homothétie $\mathcal{H}$	« Translation » $\mathcal{C}_l$ Translation $\mathcal{L}$	« Rotation » $\mathcal{C}_r$ Rotation $\mathcal{R}$	Type général $\mathcal{C}$ Similitude directe $\mathcal{S}$
Pôles:	—	2 points doubles	1 point double	2 points doubles	2 points doubles
Cercles remarquables:	—	1 faisceau linéaire de cercles doubles	1 faisceau linéaire de cercles doubles	1 faisceau linéaire de cercles doubles	Pas de cercles doubles ni de cercles conjugués
Forme du parallélogramme de base:	—	Φ Ψ ω O ϖ (aplati)	ω ϖ Φ O Ψ	ϖ Φ O Ψ ω (losange)	ϖ Φ O Ψ ω (parall. quelconque)

Ces propriétés sont évidentes sur les images S, D, ou T, de C.

Ou encore: décomposer C en une $\mathcal{C}$ simple et une inversion (théorème XVIII), puis cette $\mathcal{C}$ en deux inversions (théorème XXI).

Cas de n = 4. — On obtient la $\mathcal{C}$ la plus générale, d'après le théorème suivant:

THÉORÈME XXIII. — *Toute transformation* $\mathcal{C}$ *peut être considérée comme le produit de quatre inversions* $I_1I_2J_1J_2$, *les cercles* J_1 *et* J_2 *étant orthogonaux aux cercles* I_1 *et* I_2.

En outre: l'ordre des opérations peut être permuté en s'astreignant seulement à effectuer I_2 après I_1, J_2 après J_1, c'est-à-dire que l'on a

$$\mathcal{C} = I_1I_2J_1J_2 = I_1J_1I_2J_2 = J_1I_1I_2J_2 ,$$
$$= I_1J_1J_2I_2 = J_1I_1J_2I_2 = J_1J_2I_1I_2 .$$

Bien entendu on peut remplacer I_1I_2 par $I_1'I_2'$, J_1J_2 par $J_1'J_2'$, de sorte que la décomposition dépend de deux paramètres arbitraires. Mêmes démonstrations que pour le théorème XXII.

Cas de n > 4. — Rien de particulier à signaler.

§ **15.** — *Résumé.* — Nous avons rempli le programme que nous nous étions fixés au début: trouver toutes les transformations

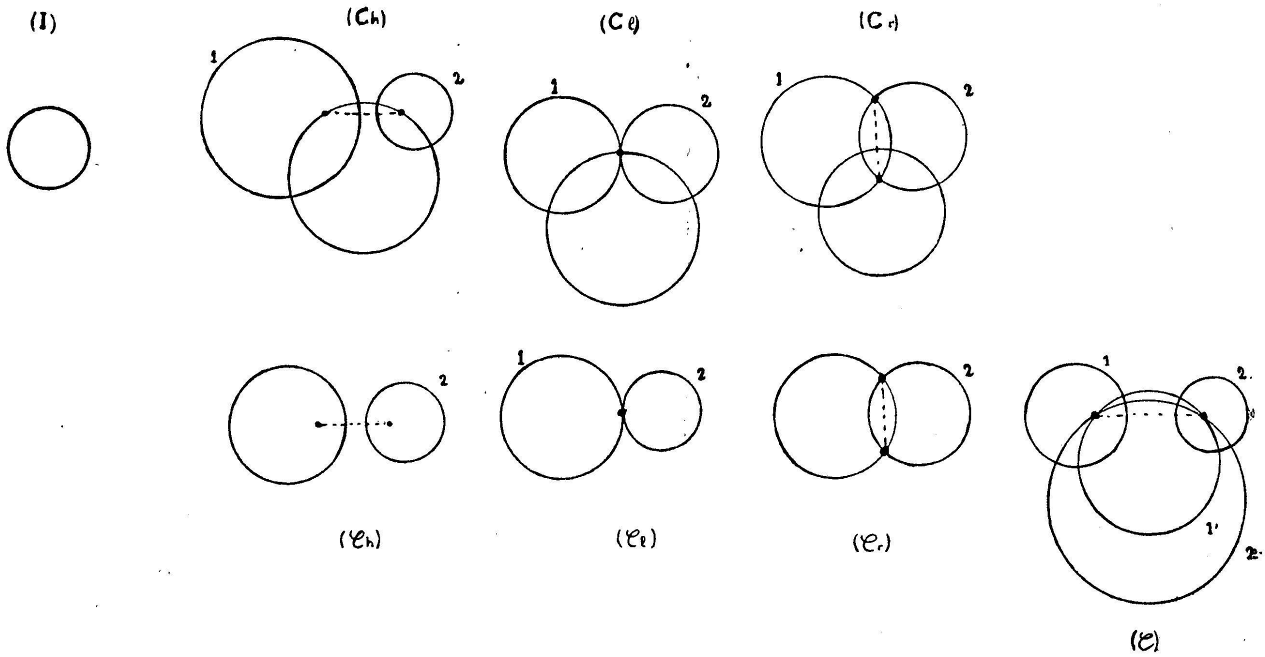

Fig. 20.

circulaires réelles du plan, et donner leurs propriétés essentielles. Les résultats obtenus en ce qui concerne les « décompositions canoniques » en produits d'inversion sont résumés par les schémas de la figure 20. [Les pôles sont marqués par de gros points; l'inversion simple I est représentée par un cercle en trait gras, car tous les points de ce cercle sont doubles; pour distinguer Γ de son inverse, il faut numéroter 1 et 2 les deux cercles correspondant à une même transformation simple composante.]

Le tableau page 177 résume l'ensemble des propriétés invariantes des différents types Γ.

En terminant remarquons que toute la théorie précédente s'applique aux transformations circulaires sur la surface d'une sphère. (Bien entendu, il n'y a plus de foyers à considérer.)

LA COURBE DE L'HÔPITAL

PAR

E. Turrière (Montpellier).

---

1. — La courbe de pression constante.

La question de la courbe plane de pression constante pour le mouvement sur elle, sans frottement, du point pesant, a été nettement posée par Jean Bernoulli dans une lettre adressée à Leibniz [1] en janvier 1695 *(curva aequabilis pressionis)* et dans une seconde lettre, encore adressée à Leibniz, en février 1696; Jean Bernoulli indiqua l'équivalence du problème et de celui du pendule à fil de tension constante. Il signala, sans explications ni calculs, que la courbe peut être algébrique ou transcendante. Il reposa une troisième fois les mêmes questions dans une pièce des *Acta eruditorum* de 1696 [2].

---

[1] G. G. Leibnitii et Joh. Bernoulli, *Commercium, philosophicum et mathematicum*, I, p. 30 et 134.

[2] *Acta eruditorum* (Supplementa, t. II), 1696, p. 291.