Zeitschrift: L'Enseignement Mathématique
Band: 36 (1937)
Heft: 1-2: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE

Artikel: LA COURBE DE L'HÔPITAL
Kapitel: 5. — La courbe de l'Hôpital.
Autor: Turrière, E.
DOI: https://doi.org/10.5169/seals-28032

Quant à ϖ, distance de O à la tangente courante, cette fonction de φ a pour expression:

$$\varpi = -\cos\varphi \int \frac{1}{(a+\sin\varphi)^2} \cdot \frac{d\varphi}{\cos^2\varphi} \, .$$

Ainsi que l'avaient indiqué Bernoulli et reconnu DE L'HÔPITAL, la courbe s'étudie soit au moyen des fonctions trigonométriques, soit au moyen de la fonction logarithmique. Deux formes distinctes en découlent pour la courbe, qui est soit un ovale, soit une courbe à branches paraboliques. La courbe algébrique de L'HÔPITAL est intermédiaire entre les deux types de courbes transcendantes.

5. — LA COURBE DE L'HÔPITAL.

Dans un précédent article [1] sur diverses courbes algébriques, j'ai mentionné cette intéressante courbe unicursale du cinquième degré, qui est une courbe de direction. Ses équations, à un facteur près de similitude, sont

$$x = 2\left(u - \frac{u^5}{5}\right), \qquad y = -(1+u^2)^2 < 0 \, ,$$

$$s = 2u + \frac{4}{3}u^3 + \frac{2}{5}u^5 \, .$$

$$\rho = (1+u^2)^3 \, , \qquad \rho = |y|^{\frac{3}{2}} \, .$$

Les équations respectives de la tangente et de la normale au point courant sont:

$$2u\mathrm{X} + (1-u^2)\mathrm{Y} = \frac{u^6}{5} + u^4 + 3u^2 - 1 \; ;$$

$$(1-u^2)\mathrm{X} - 2u\mathrm{Y} = 2u\left(\frac{1}{5}u^6 + \frac{4}{5}u^4 + u^2 + 2\right) .$$

La courbe a la forme d'un folium, sans asymptote. Elle admet un point double sur l'axe de symétrie Oy, $x = 0$,

---

1 Notes sur des courbes spéciales algébriques. *Anais da Faculdade de Ciencias do Porto*, t. XX, 1936.

$y = -2(3+\sqrt{5}) = -10{,}47$; ainsi qu'un point isolé intérieur à la courbe: $x = 0$, $y = -2(3-\sqrt{5}) = -1{,}528$.

Elle admet un foyer $F\left(x = 0,\ y = -\frac{8}{5}\right)$ auquel est associée la directrice Ox. L'équation focale entre le rayon vecteur $r = FM$ du foyer et la distance D du point M à la directrice est:

$$25r^2 = D^2(4\sqrt{D} + 5)\ .$$

D'où résulte l'équation de la courbe:

$$(25x^2 + 20y^2 + 80y + 64)^2 + 16y^5 = 0\ .$$

En introduisant l'angle α d'inclinaison de la tangente au point courant sur l'horizontale

$$u = -\operatorname{tang}\frac{\alpha}{2}\ ,$$

l'expression de la courbure devient:

$$\frac{1}{\rho} = \cos^6\frac{\alpha}{2}\ .$$

La développée est représentée par les équations:

$$\xi = -4u^3\left(1 + \frac{3}{5}u^2\right),$$

$$\eta = u^6 - 3u^2 - 2 = (u^2+1)^2(u^2-2)\ ;$$

le rayon ρ' de courbure de la développée a pour expression:

$$\rho' = 3u(u^2+1)^3$$

$$= 3\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2} \times \frac{1}{\cos^6\frac{\alpha}{2}}\ .$$

6. — Mouvement d'un point pesant sur la courbe de l'Hôpital.

Soit v_0 la vitesse au sommet de la courbe. Posons

$$v_0^2 = 2gh\ , \qquad h > 0\ .$$