

# SUR CERTAINES SURFACES

Autor(en): **Humbert, M. Pierre**

Objektyp: **Article**

Zeitschrift: **L'Enseignement Mathématique**

Band (Jahr): **36 (1937)**

Heft 1-2: **L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE**

PDF erstellt am: **09.08.2024**

Persistenter Link: <https://doi.org/10.5169/seals-28035>

## **Nutzungsbedingungen**

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern.

Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden.

Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

## **Haftungsausschluss**

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

# SUR CERTAINES SURFACES

PAR

M. Pierre HUMBERT (Montpellier).

---

On connaît toute l'aide que peut apporter la géométrie descriptive à l'étude des surfaces, et particulièrement des surfaces réglées: il arrive très souvent que l'on puisse démontrer sur l'épure, avec la plus grande facilité, des propriétés que la géométrie pure ou même l'analyse montreraient d'une façon moins évidente. On en trouvera plusieurs exemples dans le Cours de géométrie professé à l'Ecole polytechnique par M. Maurice d'Ocagne, où ce procédé d'étude est appliqué au conoïde de Plücker, aux hélicoïdes, etc. En voici encore quelques applications, conduisant à des résultats peut-être nouveaux.

I. — Considérons la surface bien connue sous le nom de *Coin de Wallis*, conoïde du 4<sup>me</sup> ordre dont les génératrices, parallèles au plan horizontal, s'appuient sur une droite verticale A et sur un cercle C dont le plan est vertical. Nous tracerons l'épure (fig. 1) en supposant le plan du cercle (C, C') debout: soit ( $\omega$ ,  $\omega'$ ) son centre. La projection horizontale d'une génératrice quelconque ( $\Delta$ ,  $\Delta'$ ), s'obtiendra aisément en rabattant sur le plan vertical de projection le plan du cercle C: la projection horizontale  $\Delta$  passe par le point  $m$  tel que  $\omega m = m' n'$ .

Cherchons alors à étudier l'intersection du conoïde avec la sphère  $S_1$  qui a le cercle C comme cercle principal. Ce cercle étant une ligne double du coin, l'intersection sera du 6<sup>me</sup> degré et, par suite, sa projection horizontale — que nous allons chercher à déterminer — sera du 3<sup>me</sup> degré. On obtiendra un point  $p$  en coupant la sphère par le plan horizontal qui contient la

génératrice  $(\Delta, \Delta')$ : ce qui donne, en projection horizontale, la circonférence de centre  $\omega$  et de rayon  $\omega m$ . La cubique cherchée est donc engendrée de la manière suivante: par un point  $a$  fixe on mène une sécante variable, rencontrant en  $m$  une droite fixe; et l'on prend sur cette sécante un point  $p$  tel que  $\omega p = \omega m$ ,  $\omega$  étant la projection de  $a$  sur la droite. C'est — on le sait — une des définitions de la strophoïde droite.

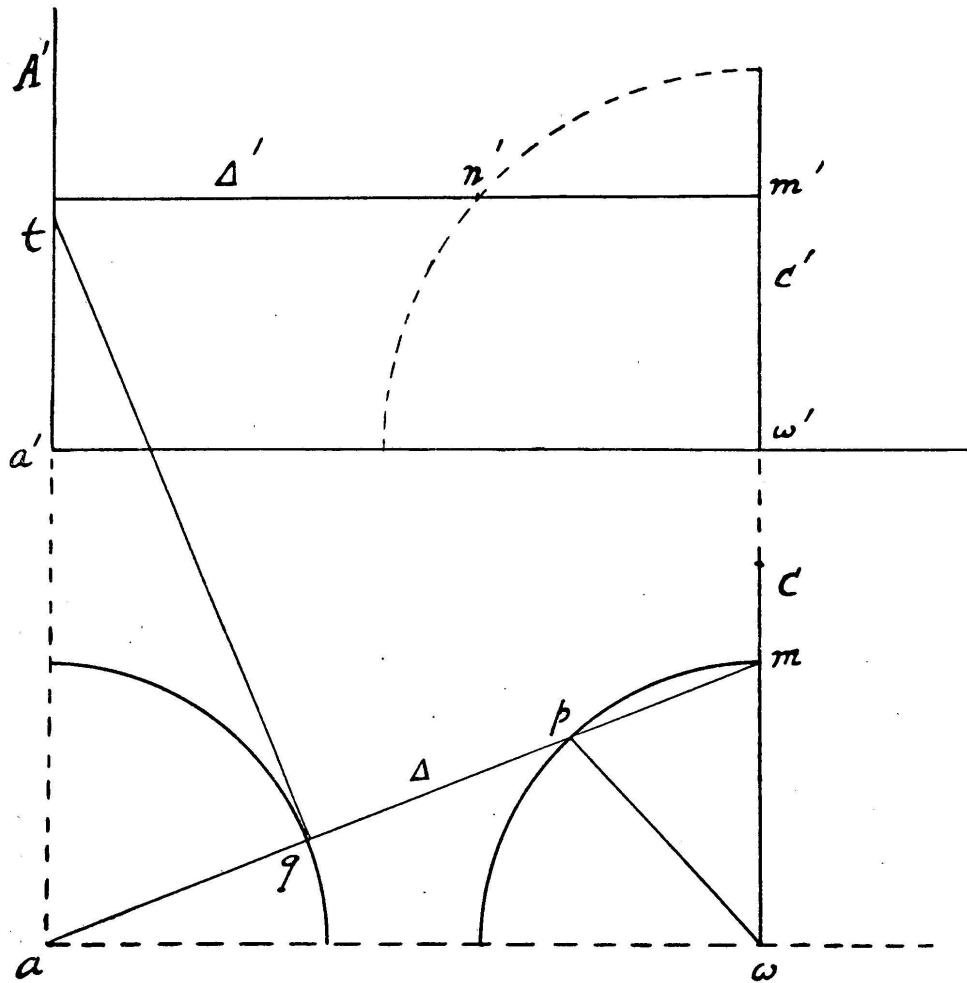


Fig. 1.

L'intersection du coin de Wallis avec la sphère  $S_1$  se projette donc horizontalement suivant une strophoïde droite.

Soit à présent la sphère  $S_2$ , de même rayon que  $S_1$ , ayant pour centre le point  $(a, a')$ : cherchons aussi son intersection avec le conoïde: la projection horizontale sera, cette fois, une quartique. La section de  $S_2$  par le plan horizontal de la génératrice  $(\Delta, \Delta')$  se projette suivant la circonférence de centre  $a$  et de rayon égal à  $\omega m$ , d'où le point  $q$  de la quartique. Menons en  $q$  la tangente

à cette circonférence, jusqu'à sa rencontre  $t$  avec la ligne de rappel de  $a$ : les triangles rectangles  $a\omega m$  et  $agt$  sont visiblement semblables, et même égaux puisque  $\omega m = aq$ . On en tire  $qt = a\omega$ , ce qui montre que le point  $q$  est le sommet d'un angle droit dont

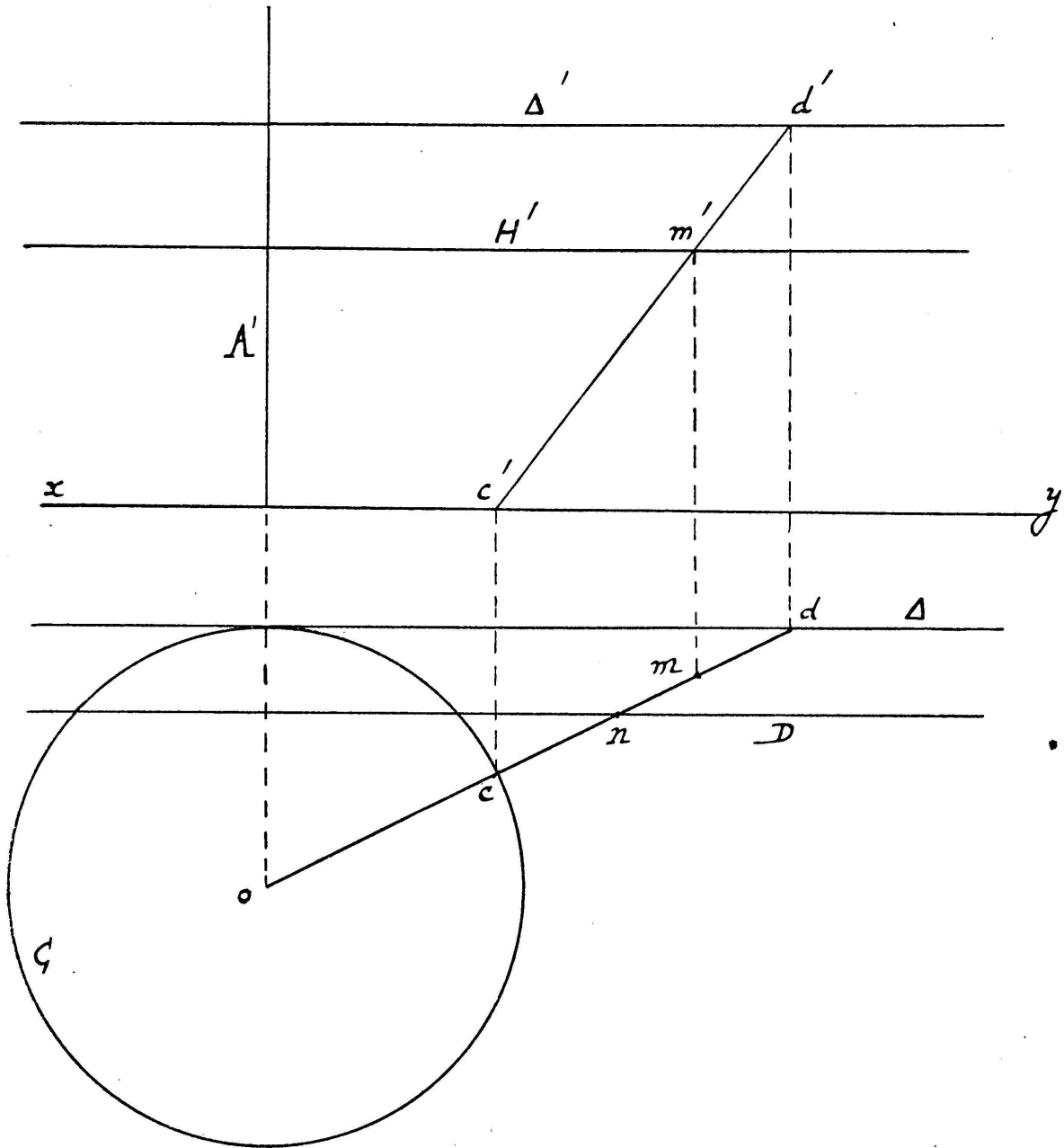


Fig. 2.

un côté passe par  $a$ , la longueur  $qt$  étant constante: on reconnaît la définition classique de la courbe *cappa*.

Ainsi l'intersection du coin et de la sphère  $S_2$  se projette horizontalement suivant une *cappa*.

II. — Considérons encore la surface réglée dont les trois directrices sont un cercle  $C$  du plan horizontal, l'axe  $A$  de ce

cercle, et une droite horizontale  $\Delta$ , située dans un plan vertical tangent au cercle. Proposons-nous d'étudier les sections de cette surface par les plans horizontaux. Faisons l'épure, en prenant pour plan vertical de projection celui qui contient  $\Delta$  (fig. 2). La projection horizontale  $cd$  d'une génératrice quelconque passe par  $o$ , centre du cercle; on obtient immédiatement la projection verticale  $c'd'$ . Soit maintenant  $H'$  la trace du plan horizontal considéré: on en déduit le point  $(m, m')$ , point courant de l'intersection; il faut trouver, dans le plan horizontal, le lieu du point  $m$ . Or ce point partage le segment  $cd$  dans un rapport constant, déterminé par les distances de  $H'$  à  $\Delta'$  et à  $xy$ . Menons alors la droite fixe  $D$ , parallèle à  $\Delta$ , partageant dans le même rapport le rayon du cercle. Nous pourrions écrire,  $n$  étant le point d'intersection de  $D$  avec  $om$ ,

$$nm = om - on .$$

Mais

$$on = K \cdot od$$

et

$$\begin{aligned} om &= oc + cm = R + K \cdot cd \\ &= R + K(od - R) \end{aligned}$$

d'où

$$nm = R(1 - K) = \text{constante} .$$

Le lieu de  $m$ , c'est-à-dire la section horizontale de la surface, est donc une conchoïde de la droite  $D$ .