

# III. — Systèmes convergents.

Objektyp: **Chapter**

Zeitschrift: **L'Enseignement Mathématique**

Band (Jahr): **36 (1937)**

Heft 1-2: **L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE**

PDF erstellt am: **12.07.2024**

## **Nutzungsbedingungen**

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern. Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

## **Haftungsausschluss**

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

d'où

$$\widehat{S_1B} - \widehat{CS_1'} = 2\varphi, \quad \widehat{S_1B} - \widehat{CS_2} - \widehat{S_2S_1'} = 2\varphi$$

$$\begin{aligned} 2\varphi &= -\widehat{BA} - \widehat{AS_1} - \widehat{CS_3} - \widehat{S_2S_1'} = -\widehat{BA} - s_1 + \widehat{S_2A} + \widehat{AC} - s_3 \\ &= -\widehat{BA} + \widehat{AC} - s_1 - s_2 - s_3 \end{aligned}$$

et

$$s_1 + s_2 + s_3 + 2\varphi = \widehat{AB} + \widehat{BA'} = \widehat{AA'} = \alpha$$

$$s_1 + s_2 + s_3 + 2\varphi - \alpha = 0.$$

Résultat qui généralise la formule donnée par M. Boulanger (N.A., 1919, p. 22).

### III. — SYSTÈMES CONVERGENTS.

7. — Soient  $l, m, n$ , des constantes proportionnelles aux éléments homologues des trois divisions du n° I.

Si l'on a

$$al + bm + cn = 0, \quad (1)$$

il existe toujours, en vertu du théorème des projections, une droite  $D$  et un angle  $\varphi$ , tels que les projections ( $\varphi$ ) sur les côtés, d'un point  $S$  de cette droite, déterminent les trois divisions proposées.

$S, S_2$ , étant les intersections de  $D$  avec le cercle circonscrit, les droites  $\Delta_1, \Delta_2$  du système sont les droites de Simson ( $\varphi$ ) de ces points.

Si  $S$  se transporte à l'infini, en vertu du n° II-4, le cercle de rayon infini correspondant, se compose de la droite de l'infini et de la droite de Simson ( $\pi - \varphi$ ) d'un point  $S_3$  tel que  $AS_3$  soit antiparallèle à  $D$  par rapport à l'angle  $B.A.C.$

Désignons par  $\delta$  cette droite de Simson. On voit qu'elle est la même, que  $S$  s'éloigne indéfiniment dans un sens ou dans l'autre.

*L'équation (1) constitue donc une condition suffisante de convergence du système.*

8. — Soient  $\lambda', \mu', \nu'$  les angles dirigés de D avec  $a, b, c$ . On a

$$\frac{\sin \cdot (\lambda' - \varphi)}{l} = \frac{\sin \cdot (\mu' - \varphi)}{m} = \frac{\sin \cdot (\nu' - \varphi)}{n} \quad (2)$$

Soient dans un système quelconque supposé convergent  $\lambda, \mu, \nu$  les seconds points d'intersections de  $\Gamma$  avec  $a, b, c$ ; on a

$$\frac{A\mu}{A\nu} = \frac{AN}{AM}$$

et si S se transporte à l'infini

$$\lim \frac{A\mu}{A\nu} = \frac{n}{m},$$

$\lambda, \mu, \nu$  sont alors en ligne droite, désignons par les mêmes lettres les angles que fait cette droite avec les côtés, on a

$$\frac{\sin \nu}{\sin \mu} = \frac{A\mu}{A\nu} = \frac{n}{m}.$$

On aurait de même

$$\frac{\sin \lambda}{\sin \mu} = \frac{l}{m},$$

$$\frac{\sin \lambda}{l} = \frac{\sin \mu}{m} = \frac{\sin \nu}{n} \quad (3)$$

Or

$$a \sin \cdot \lambda + b \sin \cdot \mu + c \sin \cdot \nu = 0,$$

donc

$$al + bm + cn = 0,$$

ce qui prouve que la condition (I) du n° 7 est nécessaire.

La droite  $\lambda \mu \nu$  est la droite  $\delta$  du système.

La comparaison de (2) avec (3) montre que  $\delta$  est parallèle à toute droite qui fait avec les côtés, les angles  $(\lambda - \varphi), (\mu' - \varphi), (\nu' - \varphi)$ , donc

$$(D, \delta) = \varphi.$$

9. — La formule (1) est la condition nécessaire et suffisante pour que le moment de la vitesse du barycentre L.M.N., par rapport au point de Lemoine soit nul. La condition nécessaire

et suffisante de convergence est donc que le barycentre  $L.M.N.$  décrive une droite qui passe par le point de Lemoine.

La condition peut encore s'écrire

$$l \sin \cdot A + m \sin \cdot B + n \sin \cdot C = 0$$

et sous cette forme, elle s'applique au cas où les côtés passent par un même point.

10. — Nous arrivons, maintenant, à la propriété capitale des systèmes convergents.

Soient,  $V$  un point quelconque du plan;  $L_1.M_1.N_1.$ , trois points homologues fixes du système;  $L, M, N$ , trois points homologues quelconques.

Je fais une inversion de pôle  $V$ , en adoptant les notations du n° I —  $L'.M'.N'$ . enveloppent respectivement les coniques (C) et (A).

Soit  $zz', xx'$  les positions limites de ces droites quand  $L$  est à l'infini,  $\lambda_1 \mu_1$ , les angles de  $zz'$ , avec  $a$  et  $b$ ;  $\mu_2, \nu_2$  les angles de  $xx'$  avec  $b$  et  $c$ . On a

$$\frac{\overline{L_1 L}}{\overline{L_1' L'}} = \frac{\overline{L_1 V}}{\overline{L' V}}, \quad (1)$$

$$\frac{\overline{M_1 M}}{\overline{M_1' M'}} = \frac{\overline{M_1 V}}{\overline{M' V}}, \quad (2)$$

$$\frac{\overline{N_1 N}}{\overline{N_1' N'}} = \frac{\overline{N_1 V}}{\overline{N' V}}. \quad (3)$$

(1) et (2) donnent

$$\begin{aligned} \frac{\overline{M' V}}{\overline{L' V}} \times \frac{\overline{L_1 V}}{\overline{M_1 V}} &= \frac{\overline{M_1' M'}}{\overline{M_1 M}} \times \frac{\overline{L_1 L}}{\overline{L_1' L'}}, \\ \frac{\overline{M' V}}{\overline{L' V}} &= \frac{\overline{M_1 V} \times \overline{M_1' M}}{\overline{L_1 V} \times \overline{L_1' L'}} \times \frac{l}{m}, \end{aligned} \quad (4)$$

or, à la limite, si  $L$  est à l'infini

$$\overline{L_1' L'} = \overline{L' V}, \quad (5)$$

$$\overline{M_1' M'} = \overline{M_1' V}, \quad (6)$$

d'un autre côté

$$\frac{\sin \lambda_1}{\sin \mu_1} = \lim \cdot \frac{\sin \widehat{M'L'V}}{\sin \widehat{L'M'V}} = \lim \cdot \frac{M'V}{L'V} \quad (7)$$

et d'après (4), (5), (6)

$$\frac{\sin \lambda_1}{\sin \mu_1} = \frac{\overline{M_1V} \cdot M'V}{\overline{L_1V} \cdot L'V} \times \frac{l}{m} = \frac{l}{m} \quad (8)$$

$$\lambda_1 = \lambda, \quad \mu_1 = \mu. \quad (9)$$

On aurait de même  $\mu_2 = \mu$ ,  $\nu_2 = \nu$ , donc  $zz'$  et  $xx'$  se confondent avec une parallèle à  $\delta$ .

Les deux coniques (C) et (A) ont cette parallèle pour tangente commune. Le cercle  $\Gamma$  correspondant est une ligne droite qui passe par V et se confond avec  $xz$ ; il peut être exclu du groupe des quatre cercles  $\Gamma$  qui passent en général par V.

Donc: *dans tout système convergent, l'enveloppe de la corde commune au cercle variable  $\Gamma$  et à une position fixe  $\Gamma_0$  quelconque de ce cercle est une conique  $\Sigma$  tangente à  $\Delta_1$ ,  $\Delta_2$  et  $\delta$ .*

#### IV. — SYSTÈMES ORTHOGONAUX.

11. — Si  $\Delta_1$ ,  $\Delta'$  et  $\delta$  passent par un même point  $\Omega$  la conique  $\Sigma$  se réduit à  $\Omega$  et, par suite, la corde commune à  $\Gamma$  et  $\Gamma_0$  passe constamment par ce point.

*Donc dans tout système convergent, si  $\Delta_1$ ,  $\Delta'$  et  $\delta$  passent par un même point, le cercle  $\Gamma$  reste orthogonal à un cercle fixe, ayant pour centre le point d'intersection de ces trois droites.*

Nous dirons alors que le système est *orthogonal*.

12. — Soient  $l$ ,  $m$ ,  $n$ , les trois paramètres définis au n° 7, et satisfaisant à l'équation (1) de ce numéro.

Proposons-nous de construire un système convergent orthogonal, l'angle  $\varphi$  étant arbitraire.

La direction  $\delta$  est donnée par les équations (3) n° 8 et  $\delta$  se trouve comme étant une droite de Simson ( $\pi - \varphi$ ) de direction donnée.